

Blatt 10

Aufgabe 1

1. Sei B' als A' -Algebra erzeugt von $\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij} \otimes a_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ mit $b_{ij} \in B$, $a_{ij} \in A'$. $\Rightarrow B'$ erzeugt von den $b_{ij} \otimes 1$.

Definiere $A[T_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i] \rightarrow B$, $T_{ij} \mapsto b_{ij}$, sei C der Kern. $\rightarrow \otimes_A A'$ liefert exakte Sequenz:

$$A'[\underline{T}] \rightarrow B' \rightarrow C \otimes_A A' \rightarrow 0$$

$$T_{ij} \mapsto b_{ij} \otimes 1$$

surjektiv

$$\Rightarrow C \otimes_A A' = 0 \quad \begin{matrix} A \rightarrow A' \\ \text{treufid} \end{matrix} \quad C = 0 \quad \Rightarrow B \text{ von den } b_{ij} \text{ erzeugt.}$$

2. Sei B' eine A' -Algebra von endlicher Darstellung. Nach 1. ist

B eine A -Algebra von endlichem Typ. Schreibe

$$B = A[T_1, \dots, T_n] / \alpha. \text{ Dann ist } B' = A'[T_1, \dots, T_n] / \alpha \otimes_A A'.$$

Da B' endlich präsentiert ist, ist $\alpha \otimes_A A'$ endlich erzeugt.

Nach Vorlesung ist α endlich erzeugt. Also B endlich präsentiert.

3. B' unverzweigt über A' .

$$\Leftrightarrow 0 = \Omega_{B'/A'}^1 = A' \otimes_A \Omega_{B/A}^1 \quad \begin{matrix} A \rightarrow A' \\ \text{treufid} \end{matrix} \quad \Omega_{B/A}^1 = 0$$

$\Leftrightarrow B$ unverzweigte A -Algebra

4. B' étale / $A' \Leftrightarrow B'$ flach unverzweigt / A'

$\stackrel{VL}{\Leftrightarrow} \stackrel{+3.}{B}$ flach + unverzweigt / A

$\Leftrightarrow B$ étale / A .

Aufgabe 2 Alte Definition: Quasikohärent gdw. lokal von der

Form \tilde{M} .

Allgemeine Definition: Quasikohärent gdw. lokal von der Form

$$\text{coker}(\mathcal{O}_X^I \rightarrow \mathcal{O}_X^J).$$

Alt \Rightarrow allg $M \in R$ -Mod. Beginne eine freie Auflösung

$$\begin{array}{ccccccc} _ & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F_0 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & M & & \end{array} \quad F_1 = R^I, F_0 = R^J$$

$$M = \text{coker}(R^I \rightarrow R^J)$$

$$\Rightarrow \underset{\sim \text{exakt}}{\tilde{M}} = \text{coker}(\tilde{R}^I \rightarrow \tilde{R}^J) = \text{coker}(\mathcal{O}_{\text{Spec } R}^I \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } R}^J)$$

Allg \Rightarrow alt $\mathcal{F} = \text{coker}(\mathcal{O}_X^I \rightarrow \mathcal{O}_X^J)$. Wähle affin-offen

Überdeckung von $X \rightsquigarrow \text{obdA } X = \text{Spec } R$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F} &= \text{coker}(\mathcal{O}_{\text{Spec } R}^I \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } R}^J) = \text{coker}(\tilde{R}^I \rightarrow \tilde{R}^J) \\ &= \text{coker}(R^I \rightarrow R^J) \sim \end{aligned}$$

Aufgabe 3

1. $Z \rightarrow X$ ist étale und separiert $\Rightarrow \Delta: Z \rightarrow Z \times_X Z$ ist offen und abgeschlossene Einbettung. Sei $D \subseteq Z \times_X Z$ das Bild von Δ (als offenes Unterschema).

f und g induzieren $h: Y \rightarrow Z \times_X Z$, $\pi_1 \circ h = f$, $\pi_2 \circ h = g$.

$h^{-1}(D) \subseteq Y$ ist offen und abgeschlossen, also entweder \emptyset oder Y , da Y zusammenhängend ist.

$$\pi_1 \circ h \circ i_Y = f \circ i_Y = \pi_1 \circ \Delta \circ f \circ i_Y, \quad \pi_2 \circ h \circ i_Y = g \circ i_Y = \pi_2 \circ \Delta \circ g \circ i_Y = \pi_2 \circ \Delta \circ f \circ i_Y$$

$$\Rightarrow h \circ i_Y = \Delta \circ f \circ i_Y$$

$$\Rightarrow D \ni (\Delta \circ f)(i_Y) = h(i_Y) \Rightarrow y \in h^{-1}(D), \text{ also } h^{-1}(D) \neq \emptyset.$$

Damit ist $h^{-1}(D) = Y$, also $h(Y) \subseteq D$. Also faktorisiert

h durch die Diagonale Δ , $h = \Delta \circ \tilde{h}$.

$$\Rightarrow f = \pi_1 \circ h = \pi_1 \circ \Delta \circ \tilde{h} = \tilde{h}$$

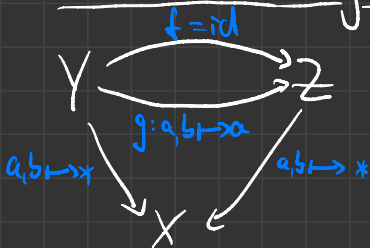
$$g = \pi_2 \circ h = \pi_2 \circ \Delta \circ \tilde{h} = \tilde{h}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & Z \times_X Z \\ \tilde{h} \downarrow & & \uparrow \Delta \\ Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & D \end{array}$$

2. Y nicht zusammenhängend

$$X = \text{Spa } k = \{x\}$$

$$Y = Z = \text{Spa } k^2 = \text{Spa } k \cup \text{Spa } k = \{a, b\}$$

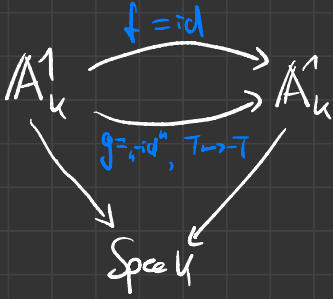


- $Z \rightarrow X$ étale, kommt von $k \rightarrow k^2$
- $Z \rightarrow X$ separiert, da affin
- $Y = a$
- $f \neq g$

$Z \rightarrow X$ nicht étale

$X = \text{Spec } k$

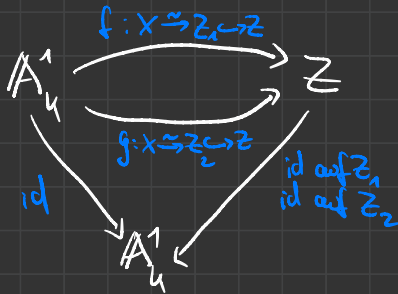
$Y = Z = \mathbb{A}_k^1$



- \mathbb{A}_k^1 zusammenhängend, da irreduzibel
- $\mathbb{A}_k^1 \rightarrow \text{Spec } k$ separiert, da affin
- $y = (\tau) = "0"$
- $f \neq g$

$Z \rightarrow X$ nicht separiert

$X = Y = \mathbb{A}_k^1$, $Z = \text{"Gerade mit zwei Ursprüngen"}$



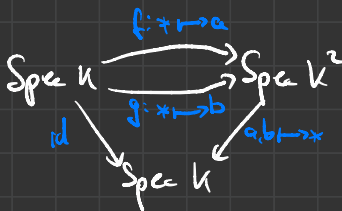
Verklebe $Z_1 = \mathbb{A}_k^1$ und $Z_2 = \mathbb{A}_k^1$
entlang $\text{id}: D(1) \xrightarrow{\sim} D(1)$
 $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$

- \mathbb{A}_k^1 zusammenhängend, da irreduzibel
- $Z \rightarrow X$ étale, da étale auf Z_1 und auf Z_2
- $y = (\tau-1) = "1"$
- $f \neq g$

$f \circ \gamma \neq g \circ \gamma \quad \forall \gamma$

$X = Y = \text{Spec } k$

$Z = \text{Spec } k^2 = \{a, b\}$



- $\text{Spec } k$ zusammenhängend
- $\text{Spec } k^2 \rightarrow \text{Spec } k$ étale, Kernt von $k \rightarrow k^2$
- $\text{Spec } k^2 \rightarrow \text{Spec } k$ separiert, da affin.
- $f \neq g$

Aufgabe 4

1. oBdA $B_0 = L$ endliche separable Körpererweiterung von k . Primitives

Element: $L = k[X]/(f)$ mit f normiert, separabel. Sei $f \in A[X]$

normiert ein Lift von f_0 mit $\deg f = \deg f_0$.

$\Rightarrow B := A[X]/(f)$ endlich frei als A -Modul und $B \otimes_A k = k[X]/(f_0) = L$.

2. A ist Henselsch und B eine endliche A -Algebra, also ist B Produkt von lokalen A -Algebren. Die sind auch wieder endlich frei.

Also \circledast B lokal. Als A -Modul ist B frei, also f.l.c.h.

$\Omega_{B/A}^1 \otimes_A k = \Omega_{B_0/k}^1 = 0$, da B_0/k unverzweigt ist.

B ist endlich erzeugt über A , also ist $\Omega_{B/A}^1$ ein endlicher B -Modul, also auch endlich über A . Nach Nakayama ist $\Omega_{B/A}^1 = 0$, also B unverzweigt über A . Insgesamt étale.

3.* A ist Henselsch und C eine endliche A -Algebra, also

$$C = \prod_{i=1}^n C_i \quad \text{mit } C_i \text{ lokal.}$$

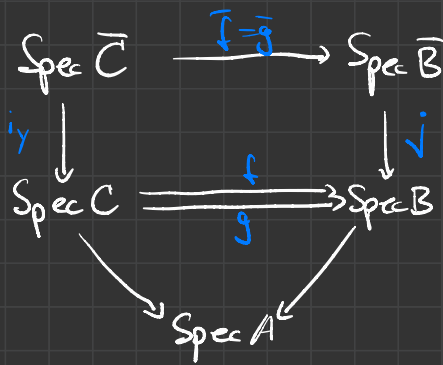
$$\Rightarrow \text{Hom}_A(B, C) = \prod_{i=1}^n \text{Hom}(B, C_i),$$

$$\text{Hom}_k(\bar{B}, \bar{C}) = \text{Hom}_k(\bar{B}, \prod_{i=1}^n \bar{C}_i) = \prod_{i=1}^n \text{Hom}(\bar{B}, \bar{C}_i)$$

$\leadsto \circledast$ C ist lokal.

Surjektivität Seien $f, g: B \rightarrow C$ mit $\bar{f} = \bar{g}$.

Da C lokal ist, ist $\text{Spec } C$ zusammenhängend. $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ist étale nach Voraussetzung und separiert, da affin.



C ist lokal und wegen Unverzweigtkeit ist $C_{\mathfrak{m}_A}$ das maximale Ideal von C . Also ist $\bar{C} = C_{\mathfrak{m}_A} \otimes_k C = C/\mathfrak{m}_A C$ der Restkörper von C .

Sei $y = \mathfrak{m}_C \in \text{Spec } C$ der spezielle Punkt. Dann ist $\kappa(y) = \bar{C}$ und $f \circ i_y = j \circ \bar{f} = j \circ \bar{g} = g \circ i_y$. Also kann man Aufgabe 3

nutzen: $f=g$

Surjektivität

Da C endlich über A ist, ist jede endlich C -Algebra auch eine endlich A -Algebra, also Produkt von lokalen Ringen.

Also ist C selbst Henselsch. Die blaue Abbildung

$$\text{Hom}_A(B, C) = \text{Hom}_C(B \otimes_A C, C)$$

$$\text{Hom}_k(\bar{B}, \bar{C}) = \text{Hom}_{\bar{C}}(\bar{B} \otimes_k \bar{C}, \bar{C}) = \text{Hom}_{\bar{C}}((B \otimes_A C) \otimes_C \bar{C}, \bar{C})$$

ist damit surjektiv nach (d) aus der Charakterisierung

von henselsch: Für jede étale Algebra $(B \otimes_A C)$ über C
dehnt sich ein Schnitt $(B \otimes_A C) \otimes_C \bar{C} \rightarrow \bar{C}$ über dem Restkörper
 (\bar{C}) auf die gesamte Algebra aus