Blatt 10

Aufgabe 1

1. Sei B' als A'-Algebra erzeugt von $\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij} \otimes a_{ij}'$, $1 \leq i \leq m$ mit $b_{ij} \in B$, $a_{ij}' \in A'$. $\Rightarrow$ B' erzeugt von den $b_{ij} \otimes 1$.

Definiere $A[T_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i] \longrightarrow B$, $T_{ij} \longmapsto b_{ij}$, sei C der Kokern. $- \otimes_A A'$ liefert exakte Sequenz:

$$A'[\underline{T}] \longrightarrow B' \longrightarrow C \otimes_A A' \longrightarrow 0$$
$$T_{ij} \longmapsto b_{ij} \otimes 1$$

surjektiv

$\Rightarrow C \otimes_A A' = 0 \overset{A \to A'}{\underset{\text{treuflach}}{\Longrightarrow}} C = 0 \Rightarrow B$ von den b_{ij} erzeugt.

2. Sei B' eine A'-Algebra von endlicher Darstellung. Nach 1. ist B eine A-Algebra von endlichem Typ. Schreibe $B = A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}$. Dann ist $B' = A'[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a} \otimes_A A'$.

Da B' endlich präsentiert ist, ist $\mathfrak{a} \otimes_A A'$ endlich erzeugt. Nach Vorlesung ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt. Also B endlich präsentiert.

3. B' unverzweigt über A'.

$\Leftrightarrow 0 = \Omega^1_{B'/A'} = A' \otimes_A \Omega^1_{B/A} \overset{A \to A'}{\underset{\text{treuflach}}{\Longleftrightarrow}} \Omega^1_{B/A} = 0$

$\Leftrightarrow$ B unverzweigte A-Algebra

4. B' étale $/A'$ $\Leftrightarrow$ B' flach + unverzweigt $/A'$

$\overset{VL}{\underset{+3.}{\Leftrightarrow}}$ B flach + unverzweigt $/A$

$\Leftrightarrow$ B étale $/A$.

<u>Aufgabe 2</u> Alte Definition: Quasikohärent gdw. lokal von der Form $\tilde{M}$.

Allgemeine Definition: Quasikohärent gdw. lokal von der Form $\operatorname{coker}(\mathcal{O}_X^I \longrightarrow \mathcal{O}_X^J)$.

<u>Alt $\Rightarrow$ allg</u> $M \in R\text{-Mod}$. Beginne eine freie Auflösung

$$\ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0 \qquad F_1 = R^I,\ F_0 = R^J$$
$$F_0 \to M.$$

$$M = \operatorname{coker}(R^I \to R^J)$$

$$\underset{\sim \text{ exakt}}{\Rightarrow} \quad \tilde{M} = \operatorname{coker}(\widetilde{R^I} \longrightarrow \widetilde{R^J}) = \operatorname{coker}(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}^I \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}^J)$$

<u>Allg. $\Rightarrow$ alt</u> $\mathcal{F} = \operatorname{coker}(\mathcal{O}_X^I \longrightarrow \mathcal{O}_X^J)$. Wähle affin-offene Überdeckung von X $\rightsquigarrow$ oBdA $X = \operatorname{Spec} R$.

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \operatorname{coker}(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}^I \longrightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}^J) = \operatorname{coker}(\widetilde{R^I} \longrightarrow \widetilde{R^J})$$
$$= \operatorname{coker}(R^I \to R^J)^\sim$$

Aufgabe 3

1. $Z \to X$ ist étale und separiert $\Rightarrow \Delta : Z \longrightarrow Z \times_X Z$ ist offene und abgeschlossene Einbettung. Sei $D \subseteq Z \times_X Z$ das Bild von Δ (als offenes Unterschema).

f und g induzieren $h : Y \longrightarrow Z \times_X Z$, $\pi_1 \circ h = f$, $\pi_2 \circ h = g$.

$h^{-1}(D) \subseteq Y$ ist offen und abgeschlossen, also entweder $\emptyset$ oder Y, da Y zusammenhängend ist.

$\pi_1 \circ h \circ i_y = f \circ i_y = \pi_1 \circ \Delta \circ f \circ i_y$, $\quad \pi_2 \circ h \circ i_y = g \circ i_y = \pi_2 \circ \Delta \circ g \circ i_y = \pi_2 \circ \Delta \circ f \circ i_y$

$\Rightarrow h \circ i_y = \Delta \circ f \circ i_y$

$\Rightarrow D \ni (\Delta \circ f)(y) = h(y) \Rightarrow y \in h^{-1}(D)$, also $h^{-1}(D) \neq \emptyset$.

Damit ist $h^{-1}(D) = Y$, also $h(Y) \subseteq D$. Also faktorisiert h durch die Diagonale Δ, $h = \Delta \circ \tilde{h}$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\tilde{h}"'] & Z \times_X Z \\ Z \arrow[r, "\sim", "\Delta"'] & D \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f = \pi_1 \circ h = \pi_1 \circ \Delta \circ \tilde{h} = \tilde{h}$

$ g = \pi_2 \circ h = \pi_2 \circ \Delta \circ \tilde{h} = \tilde{h}$

2. Y nicht zusammenhängend

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, bend left, "f = \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "g : a, b \mapsto a"'] \arrow[dr, "a, b \mapsto *"'] & & Z \arrow[dl, "a, b \mapsto *"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$X = \operatorname{Spec} k = \{*\}$ $\quad Y = Z = \operatorname{Spec} k^2 = \operatorname{Spec} k \sqcup \operatorname{Spec} k = \{a, b\}$

- $Z \to X$ étale, kommt von $k \to k^2$
- $Z \to X$ separiert, da affin
- $y = a$
- $f \neq g$

Z → X nicht étale $X = \operatorname{Spec} k \qquad Y = Z = \mathbb{A}^1_k$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \arrow[rr, bend left, "f = id"] \arrow[rr, bend right, "g = „-id“,\ T \mapsto -T"'] \arrow[dr] & & \mathbb{A}^1_k \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

- $\mathbb{A}^1_k$ zusammenhängend, da irreduzibel
- $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ separiert, da affin
- $y = (T) = „0“$
- $f \neq g$

Z → X nicht separiert $X = Y = \mathbb{A}^1_k$, $Z =$ „Gerade mit zwei Ursprüngen“

Verklebe $Z_1 = \mathbb{A}^1_k$ und $Z_2 = \mathbb{A}^1_k$ entlang $id: \underset{„\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}“}{D(T)} \xrightarrow{\sim} \underset{„\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}“}{D(T)}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \arrow[rr, bend left, "f: X \xrightarrow{\sim} Z_1 \hookrightarrow Z"] \arrow[rr, bend right, "g: X \xrightarrow{\sim} Z_2 \hookrightarrow Z"'] \arrow[dr, "id"'] & & Z \arrow[dl, "\text{id auf } Z_1,\ \text{id auf } Z_2"] \\ & \mathbb{A}^1_k & \end{tikzcd}$$

- $\mathbb{A}^1_k$ zusammenhängend, da irreduzibel
- $Z \to X$ étale, da étale auf Z_1 und auf Z_2
- $y = (T-1) = „1“$
- $f \neq g$

$f \circ i_y \neq g \circ i_y \ \forall y$ $X = Y = \operatorname{Spec} k \qquad Z = \operatorname{Spec} k^2 = \{a, b\}$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k \arrow[rr, bend left, "f: * \mapsto a"] \arrow[rr, bend right, "g: * \mapsto b"'] \arrow[dr, "id"'] & & \operatorname{Spec} k^2 \arrow[dl, "a,b \mapsto *"] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

- $\operatorname{Spec} k$ zusammenhängend
- $\operatorname{Spec} k^2 \to \operatorname{Spec} k$ étale, Kommt von $k \to k^2$
- $\operatorname{Spec} k^2 \to \operatorname{Spec} k$ separiert, da affin.
- $f \neq g$

Aufgabe 4

1. OBdA $B_0 = L$ endliche separable Körpererweiterung von k. Primitives Element: $L = k[X]/(f_0)$ mit f_0 normiert, separabel. Sei $f \in A[X]$

normiert ein Lift von f_0 mit $\deg f = \deg f_0$.

$\Rightarrow B := A[X]/(f)$ endlich frei als A-Modul und $B \otimes_A k = k[X]/(f_0) = L$.

2. A ist Henselsch und B eine endliche A-Algebra, also ist B

Produkt von lokalen A-Algebren. Die sind auch wieder endlich frei.

Also oBdA B lokal. Als A-Modul ist B frei, also flach.

$\Omega^1_{B/A} \otimes_A k = \Omega^1_{B_0/k} = 0$, da B_0/k unverzweigt ist.

B ist endlich erzeugt über A, also ist $\Omega^1_{B/A}$ ein endlicher B-Modul,

also auch endlich über A. Nach Nakayama ist $\Omega^1_{B/A} = 0$,

also B unverzweigt über A. Insgesamt étale.

3.* A ist Henselsch und C eine endliche A-Algebra, also

$C = \prod_{i=1}^n C_i$ mit C_i lokal.

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_A(B, C) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}(B, C_i)$,

$\mathrm{Hom}_k(\bar{B}, \bar{C}) = \mathrm{Hom}_k(\bar{B}, \prod_{i=1}^n \bar{C}_i) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}(\bar{B}, \bar{C}_i)$

$\rightsquigarrow$ oBdA ist C lokal.

<u>Injektivität</u> Seien $f, g : B \to C$ mit $\bar{f} = \bar{g}$.

Da C lokal ist, ist $\operatorname{Spec} C$ zusammenhängend. $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

ist étale nach Voraussetzung und separiert, da affin.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} \bar{C} \arrow[r, "\bar{f} = \bar{g}"] \arrow[d, "i_y"'] & \operatorname{Spec} \bar{B} \arrow[d, "j"] \\
\operatorname{Spec} C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr] & \operatorname{Spec} B \arrow[d] \\
& \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}
$$

C ist lokal und wegen Unverzweigtheit ist $C \cdot \mathfrak{m}_A$ das maximale Ideal von C. Also ist $\bar{C} = C \otimes_A k = C/\mathfrak{m}_A C$ der Restkörper von C.

Sei $y = \mathfrak{m}_C \in \operatorname{Spec} C$ der spezielle Punkt. Dann ist $\kappa(y) = \bar{C}$ und $f \circ i_y = j \circ \bar{f} = j \circ \bar{g} = g \circ i_y$. Also kann man Aufgabe 3 nutzen: $f = g$

<u>Surjektivität</u>

Da C endlich über A ist, ist jede endliche C-Algebra auch eine endliche A-Algebra, also Produkt von lokalen Ringen. Also ist C selbst Henselsch. Die blaue Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A(B, C) = \mathrm{Hom}_C(B \otimes_A C, C)$$

$$\mathrm{Hom}_k(\bar{B}, \bar{C}) = \mathrm{Hom}_{\bar{C}}(\bar{B} \otimes_k \bar{C}, \bar{C}) = \mathrm{Hom}_{\bar{C}}((B \otimes_A C) \otimes_C \bar{C}, \bar{C})$$

ist damit surjektiv nach (d) aus der Charakterisierung von henselsch: Für jede étale Algebra $(B \otimes_A C)$ über C dehnt sich ein Schnitt $((B \otimes_A C) \otimes_C \bar{C} \rightarrow \bar{C})$ über dem Restkörper $(\bar{C})$ auf die gesamte Algebra aus