Blatt 11

Aufgabe 1

1. Teste (d) aus der Charakterisierung von henselsch.

   Sei B eine étale A-Algebra und $B \to k$ ein Schnitt am speziellen Punkt. $k = A/m$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & k \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\text{Nilimmersion,}\\ \text{denn } m \text{ nilpotent}}"'] & \operatorname{Spec} B \arrow[d, "\text{ét}"] \\ \operatorname{Spec} A \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ist formal étale, $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} A$ ist Nilimmersion

$\Rightarrow$ Es gibt $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$, das das Diagramm kommutativ macht. Also ist (d) erfüllt. $\Rightarrow$ A henselsch.

2. (Lemma von Hensel) Wieder mit (d). $A \to B$ étale, $B \to k$ Schnitt am speziellen Punkt. Konstruiere rekursiv eine kompatible Familie $(f_n : \operatorname{Spec} A/m^n \to \operatorname{Spec} B)_{n \in \mathbb{N}^+}$ von Morphismen von A-Schemata:

   $f_1 : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} B$ ist gegeben durch $B \to k$.

   Wenn f_n bereits konstruiert ist, betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\text{Nilimmersion}"'] & \operatorname{Spec} B \arrow[d, "\text{ét}"] \\
\operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "f_{n+1}"] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ formal étale und $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}^n \to \operatorname{Spec} A/\mathfrak{m}^{n+1}$ eine Nilimmersion ist, bekommt man f_{n+1}, sodass das Diagramm kommutativ ist.

Die f_n geben kompatible Morphismen $B \to A/\mathfrak{m}^n$ von A-Algebren.

Das gibt einen Schnitt $B \to \varprojlim A/\mathfrak{m}^n = \hat{A} = A$ von $A \to B$.

Also (d) erfüllt.

3. Idee: Ersetze A durch einen noetherschen Teilring. Dort ist alles klar.

Sei $f \in A[X]$ normiert und $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ in $k[X]$ mit $\bar{g}, \bar{h}$ normiert und teilerfremd. Seien $g_0, h_0 \in A[X]$ normierte Lifts von $\bar{g}$ und $\bar{h}$ mit $\deg g_0 = \deg \bar{g}$, $\deg h_0 = \deg \bar{h}$.

Sei A_0 der Unterring von A, der von den Koeffizienten von f, g_0, h_0 erzeugt wird. $\mathfrak{m} \cap A_0$ ist ein Primideal von A_0 (als Urbild eines Primideals von A), also gibt es den lokalen Ring $A_1 = (A_0)_{\mathfrak{m} \cap A_0}$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert einen Ringhomomorphismus $A_1 \to A$, $\frac{a}{s} \mapsto as^{-1}$.

Der ist offensichtlich injektiv, also kann man A_1 als Unterring von A ansehen.

Nach Konstruktion liegen f, g_0, h_0 in $A_1[X]$. Sei m_1 das maximale Ideal von A_1 und $k_1 = A_1/m_1$. Dann ist k_1 ein Teilkörper von k mit $\bar{g}, \bar{h} \in k_1[X]$, da ja die Lifts g_0, h_0 in $A_1[X]$ liegen.

m_1 wird erzeugt von den $\frac{a}{1}$ mit $a \in m \cap A_0$, also von nilpotenten Elementen. Außerdem ist A_1 eine Lokalisierung eines endlich erzeugten Rings, also noethersch. Also ist m_1 endlich erzeugt. Damit ist m_1 nilpotent.

Nach 1. ist A_1 henselsch, also gibt es $g, h \in A_1[X] \subseteq A[X]$ mit $gh = f$ und Reduktionen $\bar{g}, \bar{h} \in k_1[X] \subseteq k[X]$.

Aufgabe 2

1. $\Gamma(M) = M^H$ ist offensichtlich eine abelsche Gruppe. Es wird zu einem $\bar{G}$-Modul mit der Operation $gH \cdot x := gx$ für $g \in G, x \in M^H$.

   Wohldefiniertheit: Sei $gH = g'H \Rightarrow g' = gh, h \in H$

   $$\Rightarrow g'x = ghx \underset{x \in M^H}{=} gx.$$

   Das ist wirklich eine Operation:

- $eH \cdot x = ex = x$
- $gH \cdot (g'H \cdot x) = gH \cdot g'x = gg'x = (gg'H)x = (gH \cdot g'H)x$

Also $\Gamma(M) \in \bar{G}$-Mod.

Auf Morphismen ist $\Gamma(M \xrightarrow{f} N) = M^H \xrightarrow{f|_{M^H}} N^H$.

Tatsächlich schickt f M^H nach N^H, denn für $x \in M^H$ und $h \in H$ gilt $h \cdot f(x) = f(hx) = f(x)$.

2. Ein G-Modul ist das gleiche wie ein Linksmodul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g \ : \ a_g \in \mathbb{Z}, \text{ fast alle } 0\}$.

Achtung, wir brauchen nicht-kommutative Ringe!

$\mathbb{Z}[\bar{G}]$ wird zu einem G-Modul über $g \cdot \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} a_{\bar{g}} \bar{g} = \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} a_{\bar{g}} \pi(g)\bar{g}$ mit $\pi : G \to \bar{G}$ der Projektion. Also ist $\mathbb{Z}[\bar{G}]$ ein $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul und sogar ein $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[\bar{G}])$-Bimodul.

$\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul + $\mathbb{Z}[\bar{G}]$-Rechtsmodul

Jetzt ist

$$\operatorname{Hom}_{\substack{\mathbb{Z}[G] \\ \text{von links}}}(\mathbb{Z}[\bar{G}], M) \cong \operatorname{Hom}_{G\text{-Sets}}(\bar{G}, M)$$

$$f \longmapsto f(eH)$$

$$\cong \{x \in M : hx = x \ \forall h \in H\}$$

$$= M^H = \Gamma(M)$$

und die $\bar{G}$-Operation auf $\Gamma(M)$ kommt von der $\mathbb{Z}[\bar{G}]$-Rechtsmodulstruktur auf $\mathbb{Z}[\bar{G}]$.

$$\rightsquigarrow \Gamma = \mathrm{Hom}_{\underset{\text{von links}}{\mathbb{Z}[G]}}\left({}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[\bar{G}]_{\mathbb{Z}[\bar{G}]}, -\right)$$

$\otimes$-Hom-Adjunktion geht für nicht-kommutative Ringe genau wie für kommutative. Also hat Γ ein Linksadjungiertes

$$\pi^* : {}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[\bar{G}]_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} -$$

$$\pi^* : M \longmapsto \mathbb{Z}[\bar{G}] \otimes_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} M \cong M \quad \text{mit einer } G\text{-Operation.}$$

Also ist π^* die Identität auf den zugrundeliegenden abelschen Gruppen. Insbesondere ist π^* exakt.

3. Betrachte folgendes Diagramm von Kategorien:

$$\begin{tikzcd}
G\text{-Mod} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^G_H"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & \bar{G}\text{-Mod} \arrow[d, "\mathrm{Res}^{\bar{G}}_1 = \mathrm{Forget}"] \\
H\text{-Mod} \arrow[r, "H^0(H,-) = -^H"'] & \mathrm{Ab}
\end{tikzcd}$$

Mit $\mathrm{Res}^G_H : M \longmapsto M$ mit Einschränkung der Operation und $\mathrm{Res}^{\bar{G}}_1$ dem Funktor, der die $\bar{G}$-Operation vergisst. Beide sind exakt. Γ erhält Injektive nach 2. Zeige noch, dass

Res_H^G auch Injektive erhält. Betrachte wieder $\mathbb{Z}[G]$. Das hat einen Unterring $\mathbb{Z}[H]$, damit wird $\mathbb{Z}[G]$ zu einem $\mathbb{Z}[H]$-Rechtsmodul und damit zu einem $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[H])$-Bimodul.

Dann ist $\mathrm{Hom}_{\substack{\mathbb{Z}[G] \\ \text{von links}}}(\mathbb{Z}[G], M) = M = \mathrm{Res}_H^G M$ und die

H-Operationen passen auch zusammen. Also $\mathrm{Res}_H^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}({}_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}[G]_{\mathbb{Z}[H]}, -)$.

Dazu linksadjungiert ist $\mathbb{Z}[G] \underset{\mathbb{Z}[H]}{\otimes} -$. Als $\mathbb{Z}[H]$-Rechtsmodul ist $\mathbb{Z}[G]$ frei, denn

$$\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g \right\} = \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{h \in H} a_{g_i h}\, g_i h \right\}$$

$(g_i)_{i \in I} \subset G$ Vertretersystem von G/H

$$= \bigoplus_{i \in I} g_i \cdot \left\{ \sum_{h \in H} a_{g_i h} \cdot h \right\} = \bigoplus_{i \in I} g_i \cdot \mathbb{Z}[H]$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[G] \underset{\mathbb{Z}[H]}{\otimes} -$ exakt $\Rightarrow \mathrm{Res}_H^G$ erhält Injektive.

Damit gilt:

$$\begin{array}{ccc} R^i(\mathrm{Res}_1^{\overline{G}} \circ \Gamma) & = & R^i(H^0(H, -) \circ \mathrm{Res}_H^G) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Res}_1^{\overline{G}} \circ R^i \Gamma & & R^i(H^0(H, -)) \circ \mathrm{Res}_H^G \\ & & \| \\ & & H^i(H, -) \circ \mathrm{Res}_H^G \end{array}$$

Für $M \in G\text{-Mod}$ ist also $R^i\Gamma(M) = \mathrm{Res}_1^{\overline{G}}(R^i\Gamma(M))$

$$= H^i(H, \mathrm{Res}_H^G M) = H^i(H, M)$$

4. Betrachte die Funktoren

$$G\text{-Mod} \xrightarrow{\Gamma} \bar{G}\text{-Mod} \xrightarrow{-^{\bar{G}}} Ab$$

Für die Komposition gilt

$$\Gamma(M)^{\bar{G}} = (M^H)^{\bar{G}} = \{x \in M^H : \forall g \in G : \underbrace{gH \cdot x}_{=gx} = x\} = M^G$$

Γ erhält Injektive nach 2. Das gibt eine Grothendieck-Spektralsequenz (genannt Hochschild-Serre-Spektralsequenz):

$$E_2^{p,q} = \left(R^p(-^{\bar{G}}) \circ R^q(\Gamma)\right)(M) = H^p(\bar{G}, R^q \Gamma M)$$

$$\Longrightarrow R^{p+q}(-^G)(M) = H^{p+q}(G, M)$$

Die zugehörige Fünftermsequenz ist genau das, was gesucht war.

5. Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ hilft hier nicht mehr weiter, aber alles aus 1. und 2. geht so durch. Problematisch ist nur, dass Res_H^G Injektive erhält. Das wird vermutlich nicht mehr gelten, für injektives $I \in G\text{-Mod}$ wird $Res_H^G I$ wohl nur azyklisch sein.

Dafür nutzt man $H^i_{cont}(G, M) = \varinjlim_{\substack{H \trianglelefteq G \\ M = M^H}} H^i(G/H, M)$.

Wie das im Detail funktioniert, weiß ich nicht.

6. Wähle $G = Gal(K)$, $H = Gal(L)$, $\bar{G} = G/H = Gal(L/K)$

und $M = (K^{alg})^*$ in 4.

$\rightsquigarrow$ Injektive Abbildung

$$H^1(Gal(L/K), L^*) \hookrightarrow H^1(Gal(K), (K^{alg})^*) = 0$$ nach Hilbert 90

$\Rightarrow H^1(Gal(L/K), L^*) = 0.$