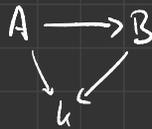


Blatt 11

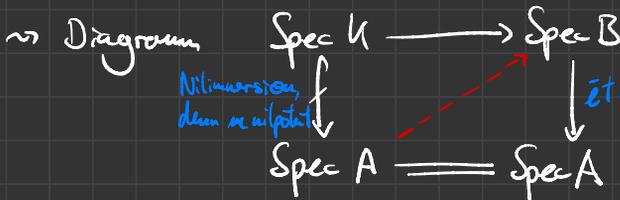
Aufgabe 1

1. Teste (d) aus der Charakterisierung von henselsch.

Sei B eine étale A -Algebra und $B \rightarrow k$ ein Schnitt am speziellen Punkt.



$k=A/\mathfrak{m}$



$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ist formal étale, $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } A$ ist Nilimmersion

⇒ Es gibt $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$, das das Diagramm kommutativ macht. Also ist (d) erfüllt. ⇒ A henselsch.

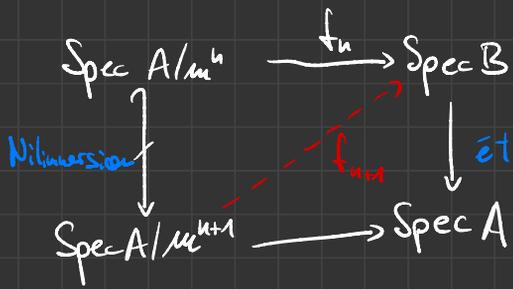
2. (Lemma von Hensel) Wieder mit (d). $A \rightarrow B$ étale, $B \rightarrow k$

Schnitt am speziellen Punkt. Konstruiere rekursiv eine kompatible Familie

Familie $(f_n: \text{Spec } A/\mathfrak{m}^n \rightarrow \text{Spec } B)_{n \in \mathbb{N}^+}$ von Morphismen von A -Schemata:

$f_1: \text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } B$ ist gegeben durch $B \rightarrow k$.

Wenn f_n bereits konstruiert ist, betrachte das Diagramm



Da $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ formal étale und $\text{Spec } A/\mathfrak{m}^n \rightarrow \text{Spec } A/\mathfrak{m}^{n+1}$ eine Nilimmersion ist, bekommt man f_{n+1} , sodass das Diagramm kommutativ ist.

Die f_n geben kompatible Morphismen $B \rightarrow A/\mathfrak{m}^n$ von A -Algebren.

Das gibt einen Schnitt $B \rightarrow \varprojlim A/\mathfrak{m}^n = \hat{A} = A$ von $A \rightarrow B$.

Also (d) erfüllt.

3. Idee: Ersetze A durch einen noetherschen Teilring. Dort ist alles klar.

Sei $f \in A[X]$ normiert und $\bar{f} = \bar{g}t$ in $k[X]$ mit \bar{g}, t normiert und teilerfremd. Seien $g_0, h_0 \in A[X]$ normierte Lifts von \bar{g} und t mit $\deg g_0 = \deg \bar{g}$, $\deg h_0 = \deg t$.

Sei A_0 der Unterring von A der von den Koeffizienten von f, g_0, h_0 erzeugt wird. $\mathfrak{m} \cap A_0$ ist ein Primideal von A_0 (als Urbild eines Primideals von A), also gibt es den lokalen Ring

$A_1 = (A_0)_{\mathfrak{m} \cap A_0}$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert einen Ringhomomorphismus $A_1 \rightarrow A$, $\frac{a}{s} \mapsto a s^{-1}$.

Der ist offensichtlich injektiv, also kann man A_1 als Unterring von A ansehen.

Nach Konstruktion liegen f, g_0, h_0 in $A_1[X]$. Sei m_1 das maximale Ideal von A_1 und $k_1 = A_1/m_1$. Dann ist k_1 ein Teilkörper von k mit $\bar{g}, \bar{h} \in k_1[X]$, da ja die Lifts g_0, h_0 in $A_1[X]$ liegen. m_1 wird erzeugt von den $\frac{a}{1}$ mit $a \in m_1 A_0$, also von nilpotenten Elementen. Außerdem ist A_1 eine Lokalisierung eines endlich erzeugten Rings, also noethersch. Also ist m_1 endlich erzeugt. Damit ist m_1 nilpotent.

Nach 1. ist A_1 henselsch, also gibt es $g, h \in A_1[X] \subseteq A[X]$ mit $gh = f$ und Reduktionen $\bar{g}, \bar{h} \in k_1[X] \subseteq k[X]$.

Aufgabe 2

1. $\Gamma(M) = M^H$ ist offensichtlich eine abelsche Gruppe. Es wird zu einem \bar{G} -Modul mit der Operation $gH \cdot x := gx$ für $g \in \bar{G}, x \in M^H$.

Wohldefiniertheit: Sei $gH = g'H \Rightarrow g' = gh, h \in H$

$$\Rightarrow g'x = ghx = gx.$$

Das ist wirklich eine Operation:

- $eh \cdot x = ex = x$

- $g^H \cdot (g'H \cdot x) = g'H \cdot g^H x = g^H x = (g^H H) x = (g'H \cdot g^H) x$

Also $\Gamma(M) \in \bar{G}\text{-Mod}$.

Auf Morphismen ist $\Gamma(M \xrightarrow{f} N) = M^H \xrightarrow{f|_{M^H}} N^H$.

Tatsächlich schickt f M^H nach N^H , denn für $x \in M^H$ und $h \in H$ gilt $h \cdot f(x) = f(hx) = f(x)$.

2. Ein G -Modul ist das gleiche wie ein Linksmodul über dem

Gruppenring $\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g : a_g \in \mathbb{Z}, \text{ fast alle } 0 \right\}$.

Achtung, wir brauchen nicht-kommutative Ringe!

$\mathbb{Z}[\bar{G}]$ wird zu einem G -Modul über $g \cdot \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} a_{\bar{g}} \bar{g} = \sum_{\bar{g} \in \bar{G}} a_{\bar{g}} \pi(g) \bar{g}$

mit $\pi: G \rightarrow \bar{G}$ der Projektion. Also ist $\mathbb{Z}[\bar{G}]$ ein

$\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul und sogar ein $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[\bar{G}])$ -Bimodul.

$\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul + $\mathbb{Z}[\bar{G}]$ -Rechtsmodul

Jetzt ist

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\bar{G}], M) \cong \text{Hom}_{G\text{-Sets}}(\bar{G}, M)$$

von links

$$\cong \left\{ x \in M : hx = x \ \forall h \in H \right\}$$

$$= M^H = \Gamma(M)$$

und die \bar{G} -Operation auf $\Gamma(M)$ kommt von der $\mathbb{Z}[\bar{G}]$ -Rechtsmodulstruktur auf $\mathbb{Z}[\bar{G}]$.

$$\leadsto \Gamma = \text{Hom}_{\substack{\mathbb{Z}[\bar{G}] \\ \text{von links}}} \left(\mathbb{Z}[\bar{G}]_{\mathbb{Z}[\bar{G}]}, - \right)$$

\otimes -Hom-Adjunktion geht für nicht-kommutative Ringe genau wie für kommutative. Also hat Γ ein Linksadjugiertes

$$\pi^*: \mathbb{Z}[\bar{G}]_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} _ \longrightarrow _$$

$$\pi^*: M \longmapsto \mathbb{Z}[\bar{G}]_{\mathbb{Z}[\bar{G}]} \otimes M \cong M \text{ mit einer } G\text{-Operation.}$$

Also ist π^* die Identität auf den zugrundeliegenden abelschen Gruppen. Insbesondere ist π^* exakt.

3. Betrachte folgendes Diagramm von Kategorien:

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Mod} & \xrightarrow{\Gamma} & \bar{G}\text{-Mod} \\ \text{Res}_H^G \downarrow & \cong & \downarrow \text{Res}_1^{\bar{G}} = \text{Forget} \\ H\text{-Mod} & \xrightarrow{\quad} & \text{Ab} \\ & H^0(H, -) = -^H & \end{array}$$

Mit $\text{Res}_H^G: M \rightarrow M$ mit Einschränkung der Operation und $\text{Res}_1^{\bar{G}}$ dem Funktor, der die \bar{G} -Operation vergisst. Beide sind exakt. Γ erhält bijektive nach 2. Zeige noch, dass

Res_H^G auch bijektiv erhält. Betrachte wieder $\mathbb{Z}[G]$. Das hat einen Unterring $\mathbb{Z}[H]$, damit wird $\mathbb{Z}[G]$ zu einem $\mathbb{Z}[H]$ -Rechtsmodul und damit zu einem $(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z}[H])$ -Bimodul.

Dann ist $\text{Hom}_{\substack{\mathbb{Z}[G] \\ \text{von links}}}(\mathbb{Z}[G], M) = M = \text{Res}_H^G M$ und die

H -Operationen passen auch zusammen. Also $\text{Res}_H^G = \text{Hom}_{\substack{\mathbb{Z}[G] \\ \text{von links}}}(\mathbb{Z}[G], -)$

Dazu linksadjungiert ist $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} -$. Als $\mathbb{Z}[H]$ -Rechtsmodul ist $\mathbb{Z}[G]$

frei, denn $\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \right\} = \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{h \in H} a_{g_i h} g_i h \right\}$

$(g_i)_{i \in I} \subset G$ Vertretersystem
von G/H

$$= \bigoplus_{i \in I} g_i \cdot \left\{ \sum_{h \in H} a_{g_i h} h \right\} = \bigoplus_{i \in I} g_i \cdot \mathbb{Z}[H]$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} -$ exakt $\Rightarrow \text{Res}_H^G$ erhält bijektiv.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} R^i(\text{Res}_1^{\bar{G}} \circ \Gamma) &= R^i(H^0(H, -) \circ \text{Res}_H^G) \\ &\parallel && \parallel \\ \text{Res}_1^{\bar{G}} \circ R^i \Gamma &= R^i(H^0(H, -)) \circ \text{Res}_H^G \\ &&& \parallel \\ &= H^i(H, -) \circ \text{Res}_H^G \end{aligned}$$

Für $M \in G\text{-Mod}$ ist also

$$\begin{aligned} R^i \Gamma(M) &= \text{Res}_1^{\bar{G}}(R^i \Gamma(M)) \\ &= H^i(H, \text{Res}_H^G M) = H^i(H, M) \end{aligned}$$

4. Betrachte die Funktionen

$$G\text{-Mod} \xrightarrow{\Gamma} \overline{G}\text{-Mod} \xrightarrow{-\overline{G}} \text{Ab}$$

Für die Komposition gilt

$$\Gamma(M)^{\overline{G}} = (M^H)^{\overline{G}} = \{x \in M^H : \forall g \in \overline{G}: \underbrace{gh \cdot x}_{=gx} = x\} = M^G$$

Γ erhält Injektive nach 2. Das gibt eine Grothendieck-Spektラルsequenz (genannt Hochschild-Serre-Spektラルsequenz):

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= (R^p(-\overline{G}) \circ R^q(\Gamma))(M) = H^p(\overline{G}, R^q \Gamma M) \\ &\Rightarrow R^{p+q}(-\overline{G})(M) = H^{p+q}(G, M) \end{aligned}$$

Die zugehörige Fünftermsequenz ist genau das, was gesucht war.

5. Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ hilft hier nicht mehr weiter, aber alles

aus 1. und 2. geht so durch. Problematisch ist nur, dass

Res_H^G Injektive erhält. Das wird vermutlich nicht mehr gelten,

für injektives $I \in G\text{-Mod}$ wird $\text{Res}_H^G I$ wohl nur azyklisch sein.

Dafür nutzt man $H_{\text{cont}}^i(G, M) = \varinjlim_{\substack{H \triangleleft G \\ M=H^H}} H^i(G/H, M)$.

Wie das im Detail funktioniert, weiß ich nicht.

6. Wähle $G = \text{Gal}(K)$, $H = \text{Gal}(L)$, $\bar{G} = G/H = \text{Gal}(L/K)$
und $M = (K^{\text{alg}})^*$ in 4.

\leadsto Injektive Abbildung

$$H^1(\text{Gal}(L/K), L^*) \hookrightarrow H^1(\text{Gal}(K), (K^{\text{alg}})^*) = 0 \quad \text{nach Hilbert 90}$$

$$\Rightarrow H^1(\text{Gal}(L/K), L^*) = 0.$$