Algebra 1 – Blatt 2

Simon Paege

18. Oktober 2021

Aufgabe 1

Sei G zyklisch mit $G = \langle g \rangle$ und $H \leq G$ eine Untergruppe. Wenn $H = \{e\}$, dann ist $H = \langle e \rangle$, also zyklisch. Ansonsten gibt es ein $h_0 \in H \setminus \{e\}$. Es ist $h_0 \in G$ also $h_0 = g^{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$. Wegen $h_0 \neq e$ ist $n_0 \neq 0$. Wenn $n_0 < 0$, so ist $H \ni h_0^{-1} = g^{-n_0}$ und $-n_0 > 0$. Es gibt also ein $d \in \mathbb{N}^+$ mit $g^d \in H$. Wähle ein minimales $d \in \mathbb{N}^+$ mit dieser Eigenschaft. Behauptung: $H = \langle g^d \rangle$. Da H eine Gruppe ist mit $g^d \in H$, ist $\langle g^d \rangle \subset H$. Für die umgekehrte Inklusion sei $h \in H$. Dann ist $h \in G$, also $h = g^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Nach Division mit Rest ist $n = qd + r$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < d$. Dann gilt

$$g^r = g^{n-qd} = g^n g^{-qd} = h(g^d)^{-q} \in H.$$

Nach Minimalität von d ist $r = 0$. Damit ist $h = (g^d)^q \in \langle g^d \rangle$. Also ist $H = \langle g^d \rangle$ zyklisch.

Aufgabe 2

(a) $\sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 2) = (1\ 4\ 2\ 3)$ ist ein Vier-Zykel, also $\operatorname{ord} \sigma = 4$. Für das Signum schreibe σ als Produkt von Transpositionen:

$$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} (1\ 4\ 2\ 3) = \operatorname{sgn}((1\ 4)(4\ 2)(2\ 3)) = (-1)^3 = -1$$

(b) $\tau = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 5)(3\ 4\ 5)(4\ 5) = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$. Die beiden Zykel $(1\ 2)$ und $(3\ 4\ 5)$ sind disjunkt, kommutieren also. Damit ist $\tau^n = (1\ 2)^n(3\ 4\ 5)^n$ und diese Permutation ist genau dann trivial, wenn $(1\ 2)^n$ und $(3\ 4\ 5)^n$ trivial sind. Damit ist $\operatorname{ord} \tau = \operatorname{kgV}(2, 3) = 6$. Für das Signum schreibe τ als Produkt von Transpositionen:

$$\operatorname{sgn} \tau = \operatorname{sgn} (1\ 2)(3\ 4\ 5) = \operatorname{sgn}((1\ 2)(3\ 4)(4\ 5)) = (-1)^3 = -1$$

Aufgabe 3

(a) Sei $X_1 := \{(a\ b) \in \mathrm{S}_n : a \neq b\}$ die Menge der Transpositionen. Zeige $\langle X_1 \rangle = \mathrm{S}_n$. Die Inklusion $\subseteq$ ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei zunächst $\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k) \in \mathrm{S}_n$ ein Zykel. Dann ist $\sigma = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3) \cdots (a_{k-1}\ a_k)$. Jedes der $(a_i\ a_{i+1})$ liegt in $X_1 \subseteq \langle X_1 \rangle$. Da $\langle X_1 \rangle$ eine Untergruppe von S_n ist, folgt $\sigma \in \langle X_1 \rangle$.

Sei nun $\sigma \in \mathrm{S}_n$ beliebig. Nach Erinnerung kann man $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r$ schreiben mit (disjunkten) Zykeln σ_j. Nach oben liegt jedes σ_j in $\langle X_1 \rangle$, also auch deren Produkt σ.

(b) Sei $X_2 := \{(j\ j+1) \in \mathrm{S}_n : 1 \leq j < n\}$ die Menge der einfachen Transpositionen. Sei $\tau = (a\ b) \in X_1$ eine Transposition. OBdA ist $a < b$. Zeige $\tau \in \langle X_1 \rangle$ per Induktion nach $b - a$. Für $b - a = 1$ ist $(a\ a+1) \in X_2 \subset \langle X_2 \rangle$. Für $b - a > 1$ ist $\tau = (a\ a+1)(a+1\ b)(a\ a+1)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies ein Produkt von drei Elementen aus $\langle X_2 \rangle$, also $\tau \in \langle X_2 \rangle$. Damit ist $\langle X_2 \rangle$ eine Untergruppe von S_n, die X_1 umfasst. Es folgt $\mathrm{S}_n = \langle X_1 \rangle \subseteq \langle X_2 \rangle \subseteq \mathrm{S}_n$, also $\langle X_2 \rangle = \mathrm{S}_n$.

(c) Sei $X_3 = \{(1\ k) : 1 < k \leq n\}$. Wie in (b) muss man nur $X_1 \subseteq \langle X_3 \rangle$ zeigen. Sei $(a\ b) \in X_1$. Wenn $a = 1$ oder $b = 1$, dann ist $(a\ b) \in X_3 \subseteq \langle X_3 \rangle$. Ansonsten ist $(a\ b) = (1\ a)(1\ b)(1\ a) \in \langle X_3 \rangle$.

(d) Sei $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ und $X_4 = \{(1\ 2), \sigma\}$. Wie in (b) genügt $X_2 \subseteq \langle X_4 \rangle$. Für $1 \leq j < n$ gilt

$$(j\ j+1) = (\sigma^{j-1}(1)\ \sigma^{j-1}(2)) = \sigma^{j-1}(1\ 2)\sigma^{1-j} \in \langle X_4 \rangle.$$

Aufgabe 4

Die Gruppe S_4 hat Ordnung $4! = 24$. Gehe alle Teiler durch.

$d = 1$: Triviale Untergruppe $\{\mathrm{id}\}$

$d = 2$: $\langle (1\ 2) \rangle$

$d = 4$: Eine Möglichkeit ist die zyklische Gruppe $\langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$. Eine andere ist $\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. Die beiden sind nicht isomorph, denn die erste hat mit $(1\ 2\ 3\ 4)$ ein Element der Ordnung 4. In der zweiten haben alle Elemente Ordnung 1 oder 2.

$d = 8$: $\{\mathrm{id}, (1\ 3), (2\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$

$d = 3$: $\langle (1\ 2\ 3) \rangle$

$d = 6$: $\{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \cong \mathrm{S}_3$

$d = 12$: A_4

$d = 24$: S_4

Betrachte nun die Gruppe A_4. Sie hat Ordnung 12 (s.o.). Behauptung: A_4 hat keine Untergruppe von Ordnung 6. Angenommen, $H \leq \mathrm{A}_4$ mit $|H| = 6$. In A_4 gibt es die Identität, drei Doppeltranspositionen und acht 3-Zykel. H muss also ein 3-Zykel enthalten, oBdA $(1\ 2\ 3) \in H$. Damit ist auch $(1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 2)^{-1} \in H$. Da H gerade Ordnung hat, gibt es nach Blatt 1, Aufgabe 1 in H ein Element der Ordnung 2, also eine Doppeltransposition.

- Wenn $(1\ 2)(3\ 4) \in H$, dann $H \ni (1\ 2\ 3) \cdot (1\ 2)(3\ 4) \cdot (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 4)(2\ 3)$
- Wenn $(1\ 4)(2\ 3) \in H$, dann $H \ni (1\ 2\ 3) \cdot (1\ 4)(2\ 3) \cdot (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)$
- Wenn $(1\ 3)(2\ 4) \in H$, dann $H \ni (1\ 2\ 3) \cdot (1\ 3)(2\ 4) \cdot (1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 2)(3\ 4)$

Es sind also alle Doppeltranspositionen in H enthalten. Damit sind alle sechs Elemente von H gefunden:

$$H = \{\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

Das ist allerdings keine Untergruppe, denn $(1\ 2\ 3) \cdot (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 3\ 4) \notin H$. Widerspruch!