Algebra 1 – Blatt 5

Simon Paege

5. November 2021

Aufgabe 1

D_{2n} besteht aus den Elementen r^k und $r^k s$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Konjugate der Spiegelung s sind also

$$r^k \cdot s \cdot r^{-k} = r^k \cdot r^k \cdot s = r^{2k} s$$

und

$$r^k s \cdot s \cdot (r^k s)^{-1} = r^k \cdot s r^{-k} = r^k r^k s = r^{2k} s.$$

Die Konjugate von s sind also alle Spiegelungen der Form $r^k s$ mit k gerade.
Sei zunächst n ungerade und $r^l s \in \mathrm{D}_{2n}$ eine Spiegelung. Wenn l gerade ist, ist $r^l s$ nach oben zu s konjugiert. Ansonsten ist $r^l s = r^{l+n} s$ mit $l + n$ gerade, also auch zu s konjugiert. Damit sind alle Spieglungen in derselben Konjugationsklasse.
Sei nun n gerade. Dann muss es mindestens zwei Konjugationsklassen von Spiegelungen geben, da s und rs nicht konjugiert sind. Ansonsten wäre ja $rs = r^k s$ für ein gerades k. Daraus folgte $r^{k-1} = e$, also $n \mid k-1$ wegen $\operatorname{ord} r = n$. Das geht nicht, weil n gerade und $k-1$ ungerade ist.
Die Konjugate von s kennen wir schon; die Konjugate von rs sind

$$r^k \cdot rs \cdot r^{-k} = r^k r r^k s = r^{2k+1} s$$

und

$$r^k s \cdot rs \cdot (r^k s)^{-1} = r^k r^{-1} s^2 r^k s = r^{2k-1} s,$$

also genau die Spiegelungen $r^k s$ mit ungeradem s. Damit ist klar, dass jede Spiegelung $r^l s$ entweder zu s konjugiert ist oder zu rs. Das ergibt genau zwei Konjugationsklassen von Spiegelungen.

Aufgabe 2

(a) Für $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$(hgh^{-1})^n = e \iff hg^n h^{-1} = e \iff hg^n = h \iff g^n = e.$$

Also

$$\operatorname{ord}(hgh^{-1}) = \inf\{n > 0 : (hgh^{-1})^n = e\} = \inf\{n > 0 : g^n = e\} = \operatorname{ord} g.$$

(b)

$$\begin{aligned} h \in \mathrm{Stab}_G(gx) &\iff hgx = gx \\ &\iff g^{-1} hgx = x \\ &\iff g^{-1} hg \in \mathrm{Stab}_G(x) \\ &\iff h \in g \cdot \mathrm{Stab}_G(x) \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$g \bullet H$ ist Untergruppe
- $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$
- Seien $ghg^{-1}, gh'g^{-1} \in gHg^{-1}$ mit $h, h' \in H$. Dann ist $ghg^{-1} \cdot gh'g^{-1} = ghh'g^{-1} \in gHg^{-1}$ wegen $hh' \in H$.
- Sei $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ mit $h \in H$. Dann ist $(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$ wegen $h^{-1} \in H$.

Also ist $g \bullet H = gHg^{-1}$ wieder eine Untergruppe von G.

Operation
- $e \bullet H = eHe^{-1} = H$
- $g \bullet (h \bullet H) = g \bullet hHh^{-1} = ghHh^{-1}g^{-1} = (gh)H(gh)^{-1} = gh \bullet H$

Bahnlänge Für $h \in H$ ist $h \bullet H = hHh^{-1} = H$, also $h \in \mathrm{Stab}_G(H)$. Also $H \leq \mathrm{Stab}_G(H) \leq G$.

$$(G : H) = (G : \mathrm{Stab}_G(H))(\mathrm{Stab}_G(H) : H) = \#(G \bullet H)(\mathrm{Stab}_G(H) : H) \geq \#(G \bullet H)$$

Echte Inklusion Sei $H \lneq G$. Angenommen, es ist

$$G = \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcup_{g \in G} g \bullet H = \bigcup_{H' \in G \bullet H} H'.$$

Das ist eine Vereinigung von $\#(G \bullet H) \leq (G : H)$ Mengen, die alle Kardinalität $\#H$ haben. Die Vereinigung hat $\#G = (G : H)\#H$ Elemente. Das ist nur möglich, wenn $\#(G \bullet H) = (G : H)$ gilt und die $H' \in G \bullet H$ paarweise disjunkt sind. Insbesondere ist $\#(G \bullet H) \geq 2$. Zwei verschiedene Elemente $H', H'' \in G \bullet H$ können aber nicht disjunkt sein: Beide sind Untergruppen von G, also ist $e \in H' \cap H''$. Widerspruch!

Aufgabe 4

(a) Betrachte die Gruppenoperation von G auf G/H mit $g * g'H = gg'H$. Sie definiert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to \mathrm{Sym}(G/H)$. Sei $N \coloneqq \ker \varphi$. Als Kern eines Gruppenhomomorphismus ist N ein Normalteiler von G. Zeige nun, dass N in H enthalten ist. Für $n \in N$ gilt

$$nH = n * H = \varphi(n)(H) = \mathrm{id}(H) = H.$$

Also ist $n \in H$. Als letztes zeige noch $N \neq \{e\}$. Angenommen, $N = \{e\}$. Dann ist φ injektiv, also

$$\#G = \#\varphi(G) \mid \#\,\mathrm{Sym}(G/H) = \#\mathrm{S}_k = k!.$$

Nach Voraussetzung ist aber $\#G$ kein Teiler von k. Widerspruch! Also ist N ein nicht-trivialer Normalteiler von G, der in H enthalten ist.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 28. Nach Cauchy enthält G ein Element der Ordnung 7. Die davon erzeugte Untergruppe H hat auch Ordnung 7. Nach Lagrange ist $(G : H) = 4$. Wegen $28 \nmid 24 = 4!$ kann man (a) anwenden. Also hat G einen nicht-trivialen Normalteiler N, der in H enthalten ist. Wegen $N \leq H$ ist $\#N$ ein Teiler von $\#H = 7$. Da N nicht trivial ist, muss $\#N = 7$ sein, also $H = N$. Also ist H ein Normalteiler.

(c) Sei G eine Gruppe der Ordnung 28 mit einem Normalteiler K der Ordnung 4. Nach (b) gibt es einen Normalteiler H von G der Ordnung 7. Wir nutzen einen Satz aus Vorlesung 6, um $G \cong H \times K$ zu zeigen.

- $H \cap K$ ist eine Untergruppe von H und von K. Also ist $\#(H \cap K)$ ein Teiler von $\#H = 7$ und von $\#K = 4$. Damit ist $\#(H \cap K) = 1$, also $H \cap K = \{e\}$.
- Sei $h \in H$ und $k \in K$. Dann ist $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1} \in K$, denn $k^{-1} \in K$ und $hkh^{-1} \in K$, da K Normalteiler ist. Außerdem ist $[h, k] \in H$, denn $h \in H$ und $kh^{-1}k \in H$, da H Normalteiler ist. Dann ist $[h, k] \in H \cap K = \{e\}$. Aus $hkh^{-1}k^{-1}$ folgt $hk = kh$. Damit kommutieren H und K.

- HK ist eine Untergruppe von G, die H und K umfasst. Nach Lagrange ist $\#HK$ ein Vielfaches von $\#H = 7$ und von $\#K = 4$, also auch von 28. Wegen $\#G = 28$ ist $HK = G$

Jetzt kann man den Satz anwenden und erhält $G \cong H \times K$. Da 7 prim ist, ist H zyklisch, also abelsch. In K hat jedes Element Ordnung 1, 2 oder 4. Wenn es ein Element der Ordnung 4 gibt, ist K zyklisch, also abelsch. Ansonsten ist $\operatorname{ord} g = 2$ für alle $g \neq e$. Nach einem Lemma aus Vorlesung 7 ist K auch in diesem Fall abelsch. Insgesamt ist G isomorph zum direkten Produkt von zwei abelschen Gruppen, also selbst abelsch.