Algebra 1 – Blatt 8

Simon Paege

29. November 2021

Aufgabe 1

Seien $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K. Dann ist $K' = K[\alpha + \beta, \alpha\beta]$ algebraisch über K. Es sind α und β Nullstellen des Polynoms

$$(T - \alpha)(T - \beta) = T^2 - (\alpha + \beta)T + \alpha\beta \in K'[T]$$

Also sind beide algebraisch über K', nach Transitivität auch über K.

Aufgabe 2

Sei $f = X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X] \subseteq \mathbb{Q}[X]$ und $\bar{f} = X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ die Reduktion modulo 2. Wegen $\bar{f}(0) = 1 = \bar{f}(1)$ hat $\bar{f}$ keine Nullstellen. Da $\deg \bar{f} \leq 3$ ist $\bar{f}$ also irreduzibel. Nach Reduktionskriterium ist auch f irreduzibel.
Division mit Rest ergibt $X^4 = (X - 1)f + (3X^2 - 3X + 1)$. Setzt man α ein und nutzt $f(\alpha) = 0$, erhält man $\alpha^4 = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1$.
Mit erweitertem euklidischen Algorithmus berechnet man

$$1 = \left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right) f + \left(\frac{1}{3}X^2 + X + \frac{1}{3}\right)(1 - X^2).$$

α einsetzen:

$$1 = \left(\frac{1}{3}\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}\right)(1 - \alpha^2) \Longrightarrow (1 - \alpha^2)^{-1} = \frac{1}{3}\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3

- Sei $\alpha = \sqrt[5]{3}$. Offensichtlich ist $f = T^5 - 3$ ein normiertes Polynom mit Nullstelle α. Es ist irreduzibel nach Eisenstein (3). Also ist es das Minimalpolynom.

- Sei $\alpha = \sqrt[5]{3} + \sqrt{2}$. Über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist $f_0 = T^5 - 3$ ein Polynom, das $\sqrt[5]{3}$ annulliert. Nach Linearer Algebra 2 ist $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ein euklidischer Ring, also insbesondere faktoriell. In R ist 3 ein Primelement, denn

  $$R/(3) \cong \mathbb{Z}[X]/(3, X^2 - 2) \cong \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$$

  ist ein Körper, da $X^2 + 1$ über $\mathbb{F}_3$ irreduzibel ist. Mie Eisenstein (3) für den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ folgt, dass f_0 irreduzibel ist über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Damit sind auch beide Verschiebungen $f_+ = f_0(T + \sqrt{2})$ und $f_- = f_0(T - \sqrt{2})$ irreduzibel. f_- hat übrigens α als Nullstelle. Definiere nun $f = f_+ f_- = (T^2 - 2)^5 + 9 - 3((T - \sqrt{2})^5 + (T + \sqrt{2})^5)$. Alle $\sqrt{2}$ heben sich darin weg, also ist $f \in \mathbb{Q}[X]$. Außerdem ist f normiert und $f(\alpha) = 0$. Zeige noch, dass f irreduzibel ist, dann folgt, dass f das Minimalpolynom von α ist.

  Angenommen, $f = gh$ mit zwei normierten Polynomen f und g in $\mathbb{Q}[X]$ von positivem Grad. Dann ist $f_+ f_- = f = gh$ als Polynome über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Die beiden Faktoren links sind irreduzibel. Da g und h keine Einheiten sind, muss nun $g = f_+$ und $h = f_-$ gelten oder andersrum. Widerspruch, denn f_+ und f_- liegen nicht in $\mathbb{Q}[X]$.

- Sei $\alpha = \mathrm{i}+\sqrt{2}$. Dann ist $\alpha^2 = 1+2\sqrt{2}\mathrm{i}$, also $(\alpha^2-1)^2 = -8$. Damit ist $f = (T^2-1)^2+8$ ein normiertes Polynom, das α annulliert. Das Minimalpolynom ist nun ein Teiler davon, hat also höchstens Grad 4. Andererseits ist der Grad des Minimalpolynoms $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. Es genügt also $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \geq 4$ zu zeigen. Man rechnet nach, dass $\alpha^3 - 5\alpha = -6\sqrt{2}$ gilt. Also ist $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ und man hat einen Körperturm $\mathbb{Q}(\alpha) / \mathbb{Q}(\sqrt{2}) / \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}(\alpha)$ nicht in $\mathbb{R}$ enthalten ist, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ aber schon, ist der obere Teil der Erweiterung echt, hat also Grad ≥ 2. Gradsatz:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] \geq 2 \cdot 2 = 4$$

- Sei $\alpha = \sin(2\pi/5)$ und $\zeta = \exp(2\pi\mathrm{i}/5)$. Dann ist $\alpha = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\zeta - \zeta^{-1})$.

$$(2\alpha)^2 = -(\zeta^2 - 2 + \zeta^{-2}) \qquad 2 - (2\alpha)^2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} = \zeta^2 + \zeta^3$$

$$(2-(2\alpha)^2)^2 = \zeta^4 + 2 + \zeta \qquad (2-(2\alpha)^2)^2 + 2 - (2\alpha)^2 = 2 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 1$$

  Damit ist α eine Nullstelle von $(2-(2T)^2)^2 - (2T)^2 + 1 = 16T^4 - 20T^2 + 5$. Dieses Polynom ist irreduzibel nach Eisenstein (5). Normieren ergibt das Minimalpolynom $T^4 - \frac{5}{4}T^2 + \frac{5}{16}$.

- Sei $\alpha = \zeta - \sqrt{3}$ mit $\zeta = \exp(2\pi\mathrm{i}/12)$. Behauptung: $\alpha = \zeta^5$.

$$(\zeta^2 + \zeta^{-2})^2 = \zeta^4 + 2 + \zeta^{-4} = 1 \Longrightarrow \zeta^2 + \zeta^{-2} = 1$$

  und nicht -1, denn ζ^2 und ζ^{-2} haben beide positiven Realteil.

$$(\zeta - \zeta^5)^2 = \zeta^2 - 2\zeta^6 + \zeta^{10} = \zeta^2 + 2 - \zeta^{-2} = 3 \Longrightarrow (\zeta - \zeta^5) = \sqrt{3}$$

  und nicht $-\sqrt{3}$, denn ζ hat positiven und ζ^5 negativen Realteil. Also $\alpha = \zeta^5$. Alternativer Weg: Realteil von ζ ist $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

  Nun ist α Nullstelle von $T^{12}-1 = (T^6-1)(T^2+1)(T^4-T^2+1)$. Die ersten beiden Faktoren annullieren α nicht, also ist α Nullstelle von $f = T^4 - T^2 + 1$. Zeige noch, dass f irreduzibel ist. Über $\mathbb{R}$ ist $f = (T^2+\sqrt{3}T+1)(T^2-\sqrt{3}T+1)$. Beide Faktoren haben Grad ≤ 4 und keine reellen Nullstellen, sind als reelle Polynome irreduzibel. Wegen Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung kann f über $\mathbb{Q}$ auch höchstens in diese beiden Faktoren zerfallen. Da diese aber nicht in $\mathbb{Q}[T]$ liegen, ist f irreduzibel.

Aufgabe 4

$\Longrightarrow$ Es sei $cX + b$ mit $b, c \in R, c \neq 0$ ein Linearfaktor von P, etwa $P = (cX + b) \cdot P'$. Dann ist $P(-b/c) = (-bc/c + b)P'(-b/c) = 0$. Sei $P' = \sum_{i=0}^{n-1} a'_i X^i$. Dann folgt nach ausmultiplizieren von $(cX + b) \cdot P'$

$$a_n = ca'_{n-1}, a_0 = ba'_0 \Longrightarrow c \mid a_n, b \mid a_0$$

$\Longleftarrow$ Sei $-b/c$ eine Nullstelle von P mit $b \mid a_0$ und $c \mid a_n$. OBdA ist der Bruch $-b/c$ vollständig gekürzt. Sei K der Quotientenkörper von R. Über K ist dann $X + \frac{b}{c}$ ein Teiler von P, also teilt auch $cX + b$ das Polynom P. Schreibe also $P = (cX + b) \cdot P'$ mit $P' \in K[X]$. Der Inhalt von $cX + b$ ist $(c, b) = 1$. Nach Gauß haben also P und P' gleichen Inhalt. Wegen $P \in R[X]$ ist dann auch $P' \in R[X]$. Die Relation $(cX + b) \mid P$ gilt also auch in $R[X]$.

Aufgabe 5*

Zeige, dass β transzendent über $K(\alpha)$ ist, wenn α transzendent über $K(\beta)$ ist. Die Umkehrung folgt dann analog.

Sei α transzendent über $K(\beta)$. Dann ist $(\alpha^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ linear unabhängig über $K(\beta)$. Sei $(a_i)_{0\leq i\leq n} \subset K(\alpha)$ mit $\sum_{i=0}^n a_i\beta^i = 0$. Wegen $a_i \in K(\alpha)$ gibt es Polynome $f_i, s_i \in K[T]$, $s_i \neq 0$ mit $a_i = f_i(\alpha)/s_i(\alpha)$. Nach Erweitern der Brüche kann man annehmen, dass alle s_i gleich sind, also $s_i = s$ für alle i. Sei $f_i = \sum_j c_{ij}T^j$. Dann gilt

$$0 = s(\alpha)\sum_{i=0}^n a_i\beta^i = f_i(\alpha)\beta^i = \sum_j\left(\sum_i c_{ij}\beta^i\right)\alpha^j$$

Das ist eine Linearkombination der α^j mit Koeffizienten aus $K(\beta)$. Wegen Transzendenz von α über $K(\beta)$ sind alle Koeffizienten $\sum_i c_{ij}\beta^i$ Null. Aus Transzendenz von β über K folgt $c_{ij} = 0$ für alle i, j. Also sind alle f_i und damit auch a_i Null. Damit hat man gezeigt, dass die β^i linear unabhängig über $K(\alpha)$ sind, also β transzendent über $K(\alpha)$.