Zusammenhängende Shimura Varietäten

<u>ZIEL</u>: Definiere zusammenhängende Shimura Daten, und zusammenhängende Shimura Varietäten als $D(\Gamma)$ für Γ arithmetisch mit Kongruenzeigenschaften.
$\overset{\shortparallel}{\Gamma\backslash D}$

<u>Notation</u>: G algebraische Gruppe. $G^{ad} := G/Z$ (Zentrum), $G(\mathbb{R})^+$ bezeichnet die reell topologische Zusammenhangskomponente der 1, $ad(g) = (x \mapsto gxg^{-1})$ für $g \in G(k)$, $Ad(g)$ von $ad(g)$ induzierter Automorphismus von $Lie(G)$.

I. Kongruenzuntergruppen

<u>1. Def</u>: Sei G eine reduktive algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$ und $G \overset{\iota}{\hookrightarrow} Gl_n$ eine abgeschlossene Immersion.

(a) $\Gamma(N) := G(\mathbb{Q}) \cap \{ g \in Gl_n(\mathbb{Z}) \mid g \equiv I_n \bmod N \}$ (abhängig von ι)

(b) Eine Kongruenzuntergruppe (kurz KuG) von $G(\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe $H < G(\mathbb{Q})$, sodass $\Gamma(N) < H$ mit $[H : \Gamma(N)] < \infty$ für ein $N \geq 0$. (Unabhängig von ι nach Prop. 6)

<u>2. Bem</u>: (a) $H < G(\mathbb{Q})$ arithmetisch $\Longleftrightarrow$ $H, \Gamma(1)$ commensurable

(b) In spaltenden einfach zusammenhängenden Gruppen außer Sl_2 ist jede arithmetische Untergruppe eine KuG.

(c) Bilder von KUG unter Isogenien von algebraischen Gruppen sind i. A. keine KUG.

<u>3. Def:</u> Der Ring der endlichen Adele ist das eingeschränkte direkte Produkt

$$\mathbb{A}_f = \prod_{p<\infty}{}' (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p), \text{ d.h. für } (a_p)_p \in \mathbb{A}_f \text{ gilt für fast}$$

endliche Primstellen von $\mathbb{Q}$

alle p, dass $a_p \in \mathbb{Z}_p$ ist.

Topologie: $\prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ offen mit Produkttopologie

(<u>Bem:</u> $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{A}_f \cong \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$)

<u>4. Def./Lem:</u> Sei $V := \operatorname{Spec} \overbrace{\mathbb{Q}[T_1, \dots, T_m]/\mathfrak{a}}^{=:A} \overset{\text{Wahl von Erzeugern}}{=} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$, R eine A-Algebra. Dann ist $V(R) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(A, R) = \{ (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Q}^m \mid f(a_1, \dots, a_m) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a} \}$. Sei $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \subseteq A$ $\mathbb{Z}$-Unteralgebra.

Definieren $V(\mathbb{Z}_p) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m], \mathbb{Z}_p) = V(\mathbb{Q}_p) \cap \mathbb{Z}_p^m$

und damit $V(\mathbb{A}_f) := \prod_{p<\infty}{}' (V(\mathbb{Q}_p), V(\mathbb{Z}_p))$.

Für G eine algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$ definieren wir analog

$$G(\mathbb{A}_f) := \prod_{p<\infty}{}' (G(\mathbb{Q}_p), G(\mathbb{Z}_p))$$

<u>Bew:</u> z: $V(\mathbb{Z}_p)$ ist unabhängig von der Wahl der $x_1, \dots, x_n$.

Seien $y_1, \dots, y_m$ eine andere Wahl von Erzeugern von A, d.h. $A = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$.

Dann ex. $f_i \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, um y_i auszudrücken und ebenso umgekehrt. Für ein $d \in \mathbb{Z}$ gilt $f_i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{d}][x_1, \dots, x_n] \ \forall \ 1 \leq i \leq m$.

D.h. $\mathbb{Z}[\frac{1}{d}][x_1, \dots, x_n] = \mathbb{Z}[\frac{1}{d}][y_1, \dots, y_n] \subseteq A$.

D.h. $V(\mathbb{Z}_p)$ ist unabhängig von der Wahl der Erzeuger x_i oder y_i, wenn $p \nmid d$. $\square$

<u>5. Bsp.:</u> $\mathbb{G}_m(\mathbb{A}_f) = \prod_{p<\infty} (\mathbb{Q}_p^*, \mathbb{Z}_p^*) = \mathbb{A}_f^*$.

<u>6. Prop:</u> Sei $K < G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen. Dann ist $K \cap G(\mathbb{Q}) < G(\mathbb{Q})$ eine KUG und jede KUG von $G(\mathbb{Q})$ ist von dieser Form.

<u>7. Bem:</u> Es gibt eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $G(\mathbb{Q})$ bezüglich der KUG eine Umgebungsbasis des neutralen Elements bilden. Nach 6. Prop. stimmt diese Topolgie mit der von $G(\mathbb{Q}) \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ induzierten überein.

II. Zusammenhängende Shimura Daten

<u>8. Def:</u> Ein zusammenhängendes Shimura Datum ist ein Paar (G, D) bestehend aus einer halbeinfachen algebraischen Gruppe $G / \mathbb{Q}$ und einer $G^{ad}(\mathbb{R})^+$ - Konjugationsklasse D von Homomorphismen $u: U(1) \longrightarrow G^{ad}_{\mathbb{R}}$, s.d.

SU1 : für jedes $u \in D$ kommen nur die Charaktere $z, z^{-1}, 1$ in der Darstellung $U(1) \longrightarrow GL(Lie(G^{ad})_{\mathbb{C}})$ gegeben durch $Ad \circ u$ vor und

SU2 : für jedes $u \in D$ ist $ad(u(-1))$ eine Cartan involution auf $G^{ad}_{\mathbb{R}}$ und

Zerlege G^{ad} in ein Produkt von einfachen Gruppen

SU3 : G^{ad} hat keinen $\mathbb{Q}$-Faktor H, s.d. $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

G ist von nicht-kompaktem Typ

9. Prop.: Ein zusammenhängendes Shimura Datum (G, D) anzugeben ist dasselbe wie

(1) eine halbeinfache algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$ von nicht-kompaktem Typ,

(2) einen hermiteschen symmetrischen Bereich und

(3) eine Operation von $G(\mathbb{R})^+$ auf D, die durch einen surjektiven Homomorphismus $G^{ad}(\mathbb{R})^+ \twoheadrightarrow \mathrm{Hol}(D)^+$ mit kompaktem Kern definiert ist,

anzugeben.

Beweisidee: Sei (G, D) ein zusammenhängendes Shimura Datum und $u \in D$. Zerlege $G^{ad}_{\mathbb{R}} = H_1 \times \ldots \times H_s$ in einfache Faktoren und dementsprechend $u = (u_1, \ldots, u_s)$, wobei u_i die Projektion von u auf $H_i(\mathbb{R})$. Dann:

1. Fall: $u_i = 1$, falls H_i kompakt ist. (Gilt nach Prop. 4.7)

2. Fall: Nach Simons letztem Korollar existiert eine irreduzibler hermitescher symmetrisches Bereich D_i' s.d. $H_i(\mathbb{R})^+ = \mathrm{Hol}(D_i')^+$ und D_i' ist in Bijektion zu der Menge D_i der $H_i(\mathbb{R})^+$-Konjugationsklasse von u_i.

$D' := \prod D_i'$ ist ein hermitescher symmetrisches Bereich und

$G(\mathbb{R})^+$ operiert darauf via $\pi: G^{ad}(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \mathrm{Hol}(D)^+$ mit $\ker(\pi)$ kompakt. Identifizieren $D := \prod D_i$ mit D'.

Seien nun $(G, D, G(\mathbb{R})^+ \twoheadrightarrow \mathrm{Hol}(D)^+)$ mit (1), (2), (3) gegeben.

Zerlege $G^{ad}_{\mathbb{R}}$ wie oben und betrachte $G^{ad}_{\mathbb{R}} = \underbrace{H_c}_{\text{kompakte Faktoren}} \times \underbrace{H_{nc}}_{\text{nicht kompakte Faktoren}}$.

Nach Simons letztem Korollar induziert die Operation von $G(\mathbb{R})^+$ auf auf D einen Isomorphismus $H_{nc}(\mathbb{R})^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hol}(D)^+$ und $\{u_p \mid p \in D\}$ ist eine $H_{nc}(\mathbb{R})^+$-Konjugationsklasse von Morphismen $U(1) \to H_{nc}(\mathbb{R})^+$, die SU1 und SU2 erfüllen.

Dann ist $\{(1, u_p) : U(1) \to H_{nc}(\mathbb{R}) \times H_c(\mathbb{R}) \mid p \in D\}$ eine $G^{ad}(\mathbb{R})^+$-Konjugationsklasse von Morphismen $U(1) \to G^{ad}(\mathbb{R})$, die SU1 und SU2 erfüllt. $\square$

<u>10. Bsp.</u>: Sei $u: U(1) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{R})$, $z = (a+ib)^2 \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \bmod \pm I_2$ und sei D die Menge der Konjugierten von u, d.h. $u' \in D$ ist von der Form $u'(z = (a+ib)^2) = A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot A^{-1} \bmod \pm I_2$ für ein $A \in SL_2(\mathbb{R})$.

Dann ist (SL_2, D) ein zusammenhängendes Shimura Datum,

denn:

SU3 gilt für SL_2, SU1 nach Wahl von D und für SU2 betrachte $\mathrm{ad}(u(-1)) = \mathrm{ad}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ und somit für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$

$\varphi = \mathrm{ad}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ und somit

$$SL_2^{(\varphi)}(\mathbb{R}) = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) \mid \varphi(\bar{A}) = A\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}) \mid d = \bar{a},\ c = -\bar{b}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\right\} = SU_2(\mathbb{R}).$$

Mit $SU_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \longmapsto (a, b)$ identifizieren wir $SU_2(\mathbb{R})$ mit einer abg. beschränkten Teilmenge von $\mathbb{C}^2$, also ist $SU_2(\mathbb{R})$ kompakt und φ eine Cartan Involution.

III. Zusammenhängende Shimura Varietäten

11. Def. / Lem.: Sei (G, D) ein zusammenhängendes Shimura Datum. Eine zusammenhängende Shimura Varietät relativ zu (G, D) ist eine algebraische Varietät der Form $D(\Gamma)$, wobei $\Gamma < G^{ad}(\mathbb{Q})^+$ arithmetisch ist und Γ das Bild einer torsionsfreien KUG $\tilde{\Gamma} < G(\mathbb{Q})^+$ enthält. Das inverse System solcher Varietäten $D(\Gamma)$ notieren wir $Sh^0(G, D)$ und nennen es die zusammenhängende Shimura Varietät von (G, D).

Bew: Wir betrachten D als hermiteschen symmetrischen Bereich auf dem $G(\mathbb{R})^+$ operiert. $\pi: G^{ad}(\mathbb{R})^+ \longrightarrow Hol(D)^+$ erfüllt $\ker(\pi)$ ist kompakt und daher ist das Bild $\bar{\Gamma}$ jeder arithmetischen U.G. $\Gamma < G^{ad}(\mathbb{Q})^+$ wieder arithmetisch und $\Gamma \longrightarrow \bar{\Gamma}$ hat endlichen Kern. Nach dem Satz von Baily-Borel und dem Satz von Borel ist $D(\Gamma) = \Gamma / D = \bar{\Gamma} / D$ eine algebraische Varietät und für jedes $\Gamma' \subset \Gamma$ mit den nötigen schönen Eigenschaften ist $D(\Gamma') \longrightarrow D(\Gamma)$ regulär. $\square$

Es ist notwendig, dass $\Gamma < G^{ad}(\mathbb{Q})^+$ das Bild einer KUG enthält, da die arithmetischen Eigenschaften von Γ / D für nicht-KUGs noch nicht hinreichend bekannt sind.

<u>12. Bem:</u> Man kann sich überlegen, dass $G(\mathbb{Q})^+$ via Konjugation auf dem inversen System $Sh^\circ(G,D)$ operiert und sich dies sogar durch Stetigkeit zu einer Operation von $\left(G(\mathbb{Q})^+\right)^\wedge$ der Vervollständigung von $G(\mathbb{Q})^+$ bzgl. $\mathcal{T}$ fortsetzt.

<u>13. Bsp.</u> (a) Sei $G = SL_2$ und $D = \mathcal{H}_1$ die obere Halbebene. Dann ist $Sh^\circ(G,D)$ die Familie der elliptischen Modulkurven $\Gamma \backslash \mathcal{H}_1$, wobei Γ torsionsfreie arithmetische Untergruppen von $PGL_2(\mathbb{R})^+$ sind, das Bild von $\Gamma(N)$ für ein N enthalten.

(b) Sei B eine Quaternionenalgebra über einem total reellen Körper F.

Dann gilt $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \prod_{v: F \hookrightarrow \mathbb{R}} B \otimes_{F,v} \mathbb{R}$ und $B \otimes_{F,v} \mathbb{R} \cong \begin{cases} \mathbb{H} \\ M_2(\mathbb{R}) \end{cases}$

Sei G die halbeinfache algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$ gegeben durch

$G(\mathbb{Q}) = \ker(N : B^* \longrightarrow F^*)$.

Dann ist $G(\mathbb{R}) \simeq_{\text{Homöo}} \mathbb{H}^{\times 1} \times \ldots \times \mathbb{H}^{\times 1} \times SL_2(\mathbb{R}) \times \ldots \times SL_2(\mathbb{R})$

für $\mathbb{H}^{\times 1} = \ker(N : \mathbb{H}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*)$.

Wenn mindestens ein Faktor $SL_2(\mathbb{R})$ vorhanden ist, ist G von so viele Faktoren wie $Sl_2(\mathbb{R})$

nicht-kompaktem Typ und $G(\mathbb{R})$ operiert so auf $D = \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_1$, dass die Bedingungen aus Prop. 10 erfüllt sind, also ist (G, D) ein zusammenhängendes Shimura Datum.

Ist $B = M_2(F)$, so heißen die zusammenhängenden Shimura Varietäten relativ zu (G, D) $D(\Gamma)$ Hilbert modular varieties.

14. Satz (Starke Approximation): Sei G eine algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$. Ist G einfach zusammenhängend, halbeinfach und von nicht-kompaktem Typ, so liegt $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{A}_f)$.

15. Bem: Ist G eine einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe $/\mathbb{Q}$, so ist $G(\mathbb{R})$ zusammenhängend (Müsste man noch zeigen.) und damit $G(\mathbb{Q}) \subseteq G(\mathbb{R})^+ = G(\mathbb{R})$. D.h. in der folgenden Proposition operiert $G(\mathbb{Q})$ auf D über die Aktion von $G(\mathbb{R})$.

16. Prop: Sei (G, D) ein zusammenhängendes Shimura Datum mit einfach zusammenhängendem G. Sei $K < G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen und $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q}) < G(\mathbb{Q})$ die zugehörige KUG. Dann ist

$$\begin{aligned} \Gamma \backslash D &\xrightarrow{1:1} G(\mathbb{Q}) \backslash (D \times G(\mathbb{A}_f)) / K \\ x &\longmapsto [x, 1] \end{aligned}$$

eine Bijektion. Hier operiert $G(\mathbb{Q})$ von links auf D und $G(\mathbb{A}_f)$

und K operiert von rechts auf $G(\mathbb{A}_f)$:

$$q\cdot(x,a)\cdot k = (qx,\ qak),\quad q\in G(\mathbb{Q}),\ x\in D,\ a\in G(\mathbb{A}_f),\ k\in K$$

Betrachten wir D mit seiner gewöhnlichen Topologie und $G(\mathbb{A}_f)$ entweder mit der diskreten oder adelischen Topologie, so ist die Bijektion ein Homöomorphismus.

<u>Bew.idee:</u> Nach starker Approximation + K offen gilt $G(\mathbb{A}_f) = G(\mathbb{Q})\cdot K$.

Das liefert, dass jedes Element in $G(\mathbb{Q})\backslash(D\times G(\mathbb{A}_f))/K$ von der Form $[x,1]$ ist.

$[x,1] = [y,1] \iff \exists\, q\in G(\mathbb{Q}),\ k\in K$ s.d. $y = qx,\ 1 = q\cdot k$.

$\Rightarrow q = k^{-1}\in\Gamma \Rightarrow \big([x,1]=[y,1] \iff \bar{x}=\bar{y}$ in $\Gamma\backslash D\big)$.

Betrachten

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & D\times(G(\mathbb{A}_f)/K) \arrow[d] \\
\Gamma\backslash D \arrow[r] & G(\mathbb{Q})\backslash(D\times G(\mathbb{A}_f))/K
\end{tikzcd}$$

$x \mapsto (x,\bar{1})$, $\quad \bar{x}\mapsto [x,1]$

φ ist ein Homöo auf sein Bild, da $G(\mathbb{A}_f)/K$ diskret ist, weil
offen
K offen ist. Dann ist auch die untere Abb. ein Homöo. $\square$

<u>17. Prop.:</u> Im Limes gilt $\varprojlim_K G(\mathbb{Q})\backslash(D\times G(\mathbb{A}_f))/K = G(\mathbb{Q})\backslash(D\times G(\mathbb{A}_f))$ mit adelischer Topologie auf $G(\mathbb{A}_f)$.

<u>18. Bem:</u> (a) 17. Prop. ist so nützlich, weil wir sehen, dass $G(\mathbb{A}_f)$ auf dem inversen System $(\Gamma\backslash D)_\Gamma$ operiert und andererseits

$$\varprojlim \Gamma\backslash D \underset{\text{Hom}\ddot{o}\ddot{o}}{\simeq} G(\mathbb{Q})\backslash (D \times G(\mathbb{A}_f)).$$

Ein weiteres Grund wird wohl ersichtlich in den nächsten Vorträgen.

(b) Man kann zeigen, dass der inverse Limes $Sh^\circ(G,D) = (\Gamma\backslash D)_\Gamma$ als Schema existiert, das sogar lokal Noethersch und regulär ist.

<u>19. Bem:</u> Es gibt noch eine alternative Beschreibung von zusammenhängenden Shimura Daten über Konjugationsklassen von Morphismen $h: \mathbb{S} \longrightarrow G^{ad}_{\mathbb{R}}$:

reeller Torus, s.d. $\mathbb{S}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}^\times$

Ein zusammenhängendes Shimura Datum kann alternativ (und äquivalent) definiert werden als ein Paar (G, X^+) bestehend

aus einer halbeinfachen algebraischen Gruppe $/\mathbb{Q}$ G und einer $G^{ad}(\mathbb{R})^+$ - Konjugationsklasse von Homomorphismen $h: \mathbb{S} \to G^{ad}_{\mathbb{R}}$,

sodass

SV1 : für alle $h \in X^+$ kommen nur die Charaktere $\frac{z}{\bar{z}}, \frac{\bar{z}}{z}, 1$ in der Darstellung $\mathbb{S} \longrightarrow GL\, Lie(G^{ad})_{\mathbb{C}}$ definiert durch $Ad \circ h$ vor und

SV2 : für alle $h \in X^+$ ist $ad(h(i))$ eine Cartan involution von $G^{ad}_{\mathbb{R}}$ und

SV3 : G^{ad} hat keinen $\mathbb{Q}$-Faktor auf dem die Projektion von h trivial ist

Diese alternative Definition ist angeblich besser, wenn man auch mit nicht zusammenhängenden Shimura Varietäten arbeitet.