– Shimura Varietäten –

Ziel: Definiere ein Shimura Datum und dann ausgehend eine (relative) Shimura Varietät

Erinnerung: Ein zusammenhängendes Shimura Datum ist ein Paar (G, D) mit

G: halbeinfache alg. Gruppe $/\mathbb{Q}$

D: Konj. klasse von Hom. $u: U(1) \to G^{ad}_{\mathbb{R}}$ mit Axiomen
$\underbrace{}_{G^{ad}(\mathbb{R})^+}$

Langlands Programm: Studiere reduktive Gruppen

↳ Wir wollen eine Theorie für reduktive alg. Gruppen anstelle von halbeinfachen

0. Notationen für reduktive alg. Gruppen

1. Definition

a) Eine alg. Gruppe über einem Körper k ist ein Gruppenschema $G/_k$ v. e. T.

b) Eine alg. Gruppe $G/_k$ heißt unipotent, falls jede nicht-triviale Darst. von G einen nicht-trivialen Fixvektor hat, d.h.

(V, r): Darst von G, $V \neq 0 \Rightarrow V^G \neq 0$

c) Eine alg. Gruppe $G/_k$ heißt reduktiv, falls $G/_k$ zusammenhängend ist und $G_{\bar{k}}$ keine zsh. normale unipotente UGR außer e enthält.

Bemerkung

Ist R ein Ring, so heißt $r \in R$ unipotent, falls $r - 1 \in R$ nilpotent ist. Ein Endomorphismus $f: V \to V$ z.V. endlich-dim VR V ~~heißt~~ ist unipotent, falls $\chi_f(T) = (T-1)^{\dim V}$ ist. Das sind genau die Endomorph. von V, s.d. es eine Basis von V gibt mit

$$n_{\underline{v}}(f) \in \mathbb{U}_n(k) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Man kann nun zeigen:

$G/_k$ ist unipotent $\Leftrightarrow \exists$ alg. UGR $H \leq \mathbb{U}_n$ s.d. $G \cong H$

⌈Milne, Algebraic groups, 15.5⌋

2. Definition

$G/\mathbb{Q}$ reduktiv

a) $G^{ad} := G/Z$, Z Zentrum von G

b) $G(\mathbb{R})_+ := \{ x \in G(\mathbb{R}) \mid \bar{x} \text{ "=" } x \cdot Z(\mathbb{R}) \in (G^{ad}(\mathbb{R}))^+ \subseteq G^{ad}(\mathbb{R}) \}$

$G(\mathbb{Q})_+ := G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$

c) $G^{der} \subseteq G$ ist die alg. UGR von G, s.d. der Quotient $T := G/G^{der}$ kommutativ und maximal mit dieser Eigenschaft ist. Explizit ist G^{der} der Schnitt aller normalen alg. UGR $N \trianglelefteq G$ s.d. G/N kommutativ ist. G^{der} heißt derivierte Gruppe

3. Lemma

G/k reduktiv. Dann gibt es ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& G^{der} \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \\
Z \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "\nu"] & G^{ad} \\
& T &
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeile und Spalte exakt (als fppf-Garben) ist und f, g Isogenien mit Kern $Z \cap G^{der}$ ist.

⌈Erinnerung: Isogenie :⟺ Surj. Hom. mit endlichem Kern⌋

$\Rightarrow 1 \to Z \cap G^{der} \to Z \times G^{der} \to G \to 1$

Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
& SL_n \arrow[d] \arrow[dr] & \\
Z(GL_n) = \mathbb{G}_m \arrow[r] \arrow[dr, "x \mapsto x^n"'] & GL_n \arrow[r] \arrow[d, "\det"] & PGL_n \\
& \mathbb{G}_m &
\end{tikzcd}$$

Jede Matrix $A \in GL_n$ lässt sich schreiben als $\det A \cdot \tilde{A}$, $\tilde{A} \in SL_n$

$\leadsto GL_n/SL_n = \mathbb{G}_m$

$Z(GL_n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$

$\begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} \longmapsto x \longmapsto x^n$

1 Die reellen Punkte einer alg. Gruppe

4. Lemma/Definition

a) Ist char $k = 0$, so ist jede alg. Gruppe $/k$ glatt (Milne, Alg. Grps. 3.38)

b) Sei $k[\varepsilon]$ die k-Algebra erzeugt durch ε mit $\varepsilon^2 = 0$. Der Hom. $k[\varepsilon] \to k$, $\varepsilon \mapsto 0$ induziert für alg. Gruppe G/k einen Morph. $G(k[\varepsilon]) \to G(k)$. Ist $x \in G(k)$, so sei $T_x(G)$ die Faser dieses Morph. über $\{x\}$. Es gilt

$$T_x(G) \cong \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_G, k) \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$$

$T_x(G)$: Tangentialraum

c) $\varphi: G \to H$ surj. Hom. von alg. Gruppen. Dann: φ glatt $\Leftrightarrow$ $\ker(\varphi)$ glatt

(Dies zeigt man über Dimensionen der Tangentialräume, da G/k glatt $\Leftrightarrow$ $\dim_k T_e(G) = \dim G$)

5. Korollar

Sei $\varphi: G \to H$ surj. Hom. von alg. Gruppen über $\mathbb{R}$. Nach a) sind G, H und $\ker(\varphi)$ glatt und damit nach c) φ glatt.

Betrachtet man $\varphi(\mathbb{R}): G(\mathbb{R}) \to H(\mathbb{R})$, so sind $G(\mathbb{R}), H(\mathbb{R})$ glatte Mannigfaltigkeiten (da G, H glatt) und $\varphi(\mathbb{R})$ lässt sich auffassen als glatter Homomorphismus von glatten Mannigf.

6. Bemerkung

Im Beweis von c) zeigt man, dass $(d\varphi)_e: T_e(G) \to T_{\varphi(e)}(H) = T_e(H)$ surj. Man kann nun $G(\mathbb{R}), H(\mathbb{R})$ als reelle Lie Gruppen betrachten und es folgt dass $T_e(G(\mathbb{R})) = T_e(G)$ und $(d\varphi)_e = L(\varphi(\mathbb{R})) \cdot T_e(G) \to T_e(H)$ ist.

$\Rightarrow L(\varphi(\mathbb{R}))$ ist surj.

7. Lemma

Seien G, H reelle Lie-Gruppen und $f: G \to H$ ein Lie-Gruppen Hom, s.d. $L(f): L(G) \to L(H)$ surj. $\Rightarrow f(G^+) = H^+$

[Folgt über die exp Abb $\exp: L(G) \to G$. So ist $G^+ = \langle \exp(L(G)) \rangle$, da $H \leq G$ offen $\Leftrightarrow$ $H \leq G$ abgeschl. u. offen und $\exp$ lokaler Homöomorph. ist und

Zuletzt kommutiert
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ L(G) & \xrightarrow{df} & L(H) \end{array} \Rightarrow \exp(df(L(G))) = f(\exp(L(G)))$$ ⌟

3. Korollar

$f: G \to H$ surj. von alg. Gruppen / $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(\mathbb{R})(G(\mathbb{R})^+) = H(\mathbb{R})^+$

9. Korollar

$G/_{\mathbb{R}}$ reduktiv $\Rightarrow$ $G(\mathbb{R})$ endlich viele Zsmh.komp.

Skizze:

$G(\mathbb{R})$ endlich viele Zsmh.komp. $\Leftrightarrow$ $\pi_0(G(\mathbb{R})) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^+$ endlich.

Ist $1 \to N \to G' \to G \to 1$ exakte Seq. alg. Gruppen / $\mathbb{R}$ und $Z(G') \supseteq N$, so ist (Exaktheit von tppf Garben = Exaktheit auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$ - Punkten)

$$1 \to N(\mathbb{C}) \to G'(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C}) \to 1$$

$N \subseteq Z(G') \Rightarrow N$: kommutatives Gruppenschema

8. Korollar $\Rightarrow$
$$1 \to N(\mathbb{C})/N(\mathbb{C})^+ \to G'(\mathbb{C})/G'(\mathbb{C})^+ \to G(\mathbb{C})/G(\mathbb{C})^+ \to 1$$

$$\Rightarrow G'(\mathbb{R})/G'(\mathbb{R})^+ \to G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^+ \to \underbrace{H^1(G(\mathbb{C}/\mathbb{R}), N(\mathbb{C})/N(\mathbb{C})^+)}_{\text{Gruppe, da } N(\mathbb{C}) \text{ kommutativ}}$$

$G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -lichen.

Anwendung: $\tilde{G}$ einfach zusammh. Überlagerungsgruppe von G^{der}

$\Rightarrow 1 \to N \to Z \times \tilde{G} \to G \to 1$ mit dem Diagramm von Anfang,

d.h. N ist Kern einer Isogenie. (Man kann wohl G^{der} durch $\tilde{G}$ ersetzen ?)

$$\Rightarrow \underbrace{\pi_0(Z(\mathbb{R}) \times \tilde{G}(\mathbb{R}))}_{\text{endlich, da}} \to \pi_0(G(\mathbb{R})) \to \underbrace{H^1(\underbrace{G(\mathbb{C}/\mathbb{R})}_{\text{endlich}}, \underbrace{N(\mathbb{C})/N(\mathbb{C})^+}_{\text{endlich}})}_{\text{endlich}}$$

$\pi_0(\tilde{G}(\mathbb{R})) = 0$, da $\tilde{G}$ einfach zsmh. und $\pi_0(Z(\mathbb{R}))$ endlich (?)

□

10. Satz (Reelle Approximation)

$G/\mathbb{Q}$ zsmh. $\Rightarrow$ $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{R})$

2. Shimura Daten

11. Definition

$\boxed{\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times}$

Ein Shimura Datum ist ein Paar (G, X) bestehend aus...

.... G: reduktive alg. Gruppe

...... X: $G(\mathbb{R})$- Konj. Klasse von Hom. $h: \mathbb{S} \to G_\mathbb{R}$ mit

SV1) $\forall h \in X$: Die Hodge Struktur auf $L(G_\mathbb{R}) = T_e(G_\mathbb{R})$ definiert durch $Ad \circ h: \mathbb{S} \to G_\mathbb{R} \to GL(L(G_\mathbb{R}))$ ist von Typ $\{(-1,1), (0,0), (1,-1)\}$

SV2) $\forall h \in X$: $ad(h(i)): G_\mathbb{R} \to G_\mathbb{R}$ ist Cartan Involution

SV3) G^{ad} hat keinen $\mathbb{Q}$- Faktor s.d. $\mathbb{S} \xrightarrow{\bar{h}} G^{ad}_\mathbb{R} \to H_\mathbb{R}$ trivial ist $\forall h \in X$

$\bar{h} = (\mathbb{S} \to G_\mathbb{R} \to G^{ad}_\mathbb{R})$

12. Proposition

$G/\mathbb{R}$ reduktiv. Für $h: \mathbb{S} \to G$ sei $\bar{h}: \mathbb{S} \to G \to G^{ad}$ und sei X eine $G(\mathbb{R})$- Konj. klasse von Hom $h: \mathbb{S} \to G$. Sei $\bar{X}$ die $G^{ad}(\mathbb{R})$- Konj. klasse s.d. $\bar{h} \in \bar{X}$ $\forall h \in X$

(a) $X \to \bar{X}$, $h \mapsto \bar{h}$ injektiv

(b) $X^+ \subseteq X$ Zusammenhangskomp. Dann ist $gX^+ = X^+ \Leftrightarrow g \in G(\mathbb{R})_+$

Skizze zu a):

$T = G/G^{der}$, $G^{ad} = G/Z$

Bew.: $h: \mathbb{S} \to G$ eindeutig durch $\left\{ \begin{array}{l} h: \mathbb{S} \to G \to T \\ h: \mathbb{S} \to G \to G^{ad} \end{array} \right.$ bestimmt

Falls gleiche Projektionen, so $h_1 = e \cdot h_2$, $e: \mathbb{S} \to \underbrace{Z \cap G^{ad}}_{\text{Kern einer Isogenie, d.h. endlich}}$

$\mathbb{S}$ zsmh. und $Z \cap G^{ad}$ endlich $\Rightarrow e =$ trivial

Nun ist X Konj.-klasse $\Rightarrow h = g \tilde{h} g^{-1}$, $h, \tilde{h} \in X$, $g \in G(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ In T ist $h = \tilde{h}$ da T abelsch

$\Rightarrow h \in X$ eindeutig durch $\bar{h} \in \bar{X}$ bestimmt $\square$

3. Shimura Varietäten

Sei (G, X) ein Shimura Datum

13. Lemma

$\forall$ Zsh.komp. $X^+ \subseteq X$:

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$$

$$G(\mathbb{Q})_+ \cdot (x, a) \longmapsto G(\mathbb{Q}) (x, a)$$

ist bijektiv

Skizze:

Benutze: $\mathbb{Q} \to \mathbb{A}_f$, $q \mapsto (q, \dots)$ da endliche Primfaktorzerlegung

$\Rightarrow G(\mathbb{Q}) \to G(\mathbb{A}_f)$

Wohldef. ✓

G reduktiv $\Rightarrow G$ zsh. $\overset{\text{reelle}}{\underset{\text{Approx.}}{\Rightarrow}}$ $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{R})$.

Nach 12 b) ist $G(\mathbb{R})_+ X^+ = X^+$ und $G(\mathbb{R})_+ \subseteq G(\mathbb{R})$ offen

$\underset{\text{Dicht}}{\Rightarrow}$ $G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q}) \cdot G(\mathbb{R})_+$

$\Rightarrow X \underset{G(\mathbb{R}) \curvearrowright X \text{ transitiv}}{=} G(\mathbb{R}) X^+ = G(\mathbb{Q}) \cdot G(\mathbb{R})_+ X^+ = G(\mathbb{Q}) X^+$

$\Rightarrow$ Surjektivität

Injektivität: $[x, a] = [x', a']$ in RHS $\Rightarrow \exists q \in G(\mathbb{Q})$: $x = q x' \wedge a = q a'$

$x = q x'$, $x, x' \in X^+ \Rightarrow q$ stabilisiert $X^+ \Rightarrow q \in G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$ nach 12 b)

$\square$

14. Lemma

$\forall\, K \leq G(A_f)$ offen: $G(G)_+ \backslash G(A_f)/K$ endlich

Skizze:

G: reduktiv $\rightarrow$ G^{ad} reduktiv $\overset{?}{\Rightarrow}$ $G^{ad}(\mathbb{R}) / G^{ad}(\mathbb{R})^+$ endlich $(*)$

Jetzt:

$$\begin{tikzcd}
G(G) \arrow[r] & G(\mathbb{R}) \arrow[r] & G^{ad}(\mathbb{R}) \\
G(G)_+ \arrow[u, hook] \arrow[r] & G(\mathbb{R})_+ \arrow[u, hook] \arrow[r] & G^{ad}(\mathbb{R})^+ \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$G(G)_+ = G(G) \cap G(\mathbb{R})_+$

$G(\mathbb{R})_+ = \{x \mid \bar{x} \in G^{ad}(\mathbb{R})^+\}$

$\Rightarrow G(G)_+ \backslash G(G) \longrightarrow \underbrace{G^{ad}(\mathbb{R})^+ \backslash G^{ad}(\mathbb{R})}_{\text{endlich nach } (*)}$ ist injektiv nach Konst.

$\Rightarrow G(G)_+ \backslash G(G)$ endlich $\Rightarrow G(G)_+ \backslash G(A_f)/K$ endlich und das ist 5.17 $\square$

Damit reicht es wohl z.z., dass $G(G) \backslash G(A_f)/K$ endlich

15. Definition

Sei $K \leq G(A_f)$ komp. offen

$$Sh_K(G,X) := G(G) \backslash X \times G(A_f)/K$$

$g(x,a) := (gx, ga)$, $a \in G(A_f)/K$, $(x,a) \in X \times G(A_f)/K$:

wobei $g \in G(G)$

16. Lemma

$\mathcal{C}$: Repr. system von $G(G)_+ \backslash G(A_f)/K$ (nach 14. endlich!), $X^+ \subseteq X$ Zsmh. komp.

$$\Rightarrow G(G) \backslash X \times G(A_f)/K \cong \bigsqcup_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g \backslash X^+, \quad \Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(G)_+$$

$\qquad \|$

$Sh_K(G,A)$

Skizze:

$g \in \mathcal{E}$

$\hookrightarrow \Gamma_g \backslash X^+ \longrightarrow G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K$

$[x] \longmapsto [x, g]$

wohldef: $\Gamma_g \subseteq G(\mathbb{Q})_+$ und für $\gamma = gkg^{-1} \in \Gamma_g$: $\gamma g = gk \in gK$, d.h. in der selben Klasse wie g

$\rightsquigarrow [\gamma x, \gamma g] = [x, g] \quad \forall \gamma \in \Gamma_g$

$\parallel$

$[\gamma x, g]$

Beh: 1) Abb ist inj.

2) $G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K = \bigsqcup_{g \in \mathcal{E}} \operatorname{Im}([x] \longmapsto [x, g])$

Dann folgt mit Lemma 13 die Beh.

$\Gamma_{G(\mathbb{Q})_+} \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \;\hat{=}\; G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$ $\lrcorner$

Beweis durch stupides Nachrechnen $\square$

17. Bemerkung

$\Gamma_g \subseteq G(\mathbb{Q})$ Kongruenzugr $\Rightarrow \overline{\Gamma}_g \subseteq G^{ad}(\mathbb{Q})$ ist arithmetische UGR (Prop. 3.2, Korollar)

$\Rightarrow \Gamma_g \subseteq \operatorname{Aut}(X^+)$ ist arithmetisch

Für K klein genug wird $\Gamma_g \subseteq \operatorname{Aut}(X^+)$ torsionsfrei (Prop. 3.5)

$\Rightarrow \Gamma_g \backslash X^+$ arithmetisch lokale sym. Varietät und $Sh_K(G, X)$ endliche disj. Vereinigung von solchen Varietäten

Für $K' \subseteq K$ erhalten wir natürlicherweise $Sh_{K'}(G, X) \to Sh_K(G, X)$ (über $G(\mathbb{A}_f)/K' \to G(\mathbb{A}_f)/K$)

$\Rightarrow (Sh_K(G, X))_K$ inverses System

Wir erhalten eine $G(\mathbb{A}_f)$-Operation auf dem System:

Für $g \in G(\mathbb{A}_f)$, $K \leq G(\mathbb{A}_f)$ komp. offen ist $g^{-1}Kg \leq G(\mathbb{A}_f)$ wieder komp. offen

$$\Rightarrow \gamma(g): Sh_K(G,X) \longrightarrow Sh_{g^{-1}Kg}(G,X)$$

$$[x,a] \longmapsto [x,ag]$$

$$\left[\; G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/_K \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/_{g^{-1}Kg} \;\right]$$

Easy to check: $\gamma(gh) = \gamma(h) \circ \gamma(g)$

$$\Rightarrow (Sh_K(G,X))_K \xrightarrow{\gamma(g)} (Sh_K(G,X))_K$$

17. Definition

Sei (G,X): Shimura Datum

- Shimura Varietät relativ zu (G,X): $Sh_K(G,X)$, $K \leq G(\mathbb{A}_f)$ klein genug s.d. $Sh_K(G,X)$ eine Varietät ist
- Shimura Varietät assoziiert mit (G,X): $Sh(G,X) := \varprojlim Sh_K(G,X)$ mit $G(\mathbb{A}_f)$-Operation (K immer klein genug)

4. Morphismen von Shimura Varietäten

18. Definition

(G,X), (G',X') Shimura Daten

a) Morph. von Shimura Daten $(G,X) \to (G',X')$:$\Leftrightarrow$ Homomorph. $G \to G'$ s.d. $X \to X'$ induziert wird ($h: \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \to G'_{\mathbb{R}}$)

b) Morph. von Shimura Varietäten :$\Leftrightarrow$ Inverses System von reg. Abb $Sh_K(G,X) \to Sh_K(G',X')$ s.d. kompatibel mit $G(\mathbb{A}_f)$-Operation

19 Satz

$$\{\text{Shimura Daten}\} \longrightarrow \{\text{Shimura Varietäten}\}$$

$$(G,X) \longmapsto (Sh_K(G,X))_K = Sh(G,X)$$

ist funktoriell.

5 Die Struktur einer Shimura Varietät

Struktur $:\iff$ Struktur der Menge der Zsmh. komp. von $Sh(G,X)$ und Struktur der Komponenten

20. Definition

(G,X): Shimura Datum, $Z = Z(G)$, $T = G/G^{der}$, $\nu : G \to T$

$T(\mathbb{R})^{\dagger} := \operatorname{Im}\left(Z(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R}) \xrightarrow{\nu(\mathbb{R})} T(\mathbb{R}) \right)$

$T(\mathbb{Q})^{\dagger} := T(\mathbb{R})^{\dagger} \cap T(\mathbb{Q})$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & G \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$
surjektiv (?) da Isogenie $\Rightarrow T(\mathbb{R})^{+} = f(\mathbb{R})\left(Z(\mathbb{R})^{+}\right)$
$\subseteq f(\mathbb{R})\left(Z(\mathbb{R})\right) = T(\mathbb{R})^{\dagger}$

$\Rightarrow T(\mathbb{R})^{\dagger}$ endlicher Index in $T(\mathbb{R})$ (da $T(\mathbb{R})^{+}$ endlicher Index in $T(\mathbb{R})$ nach 9)

$T(\mathbb{Q})^{\dagger}$ " " " $T(\mathbb{Q})$

21. Satz

$$\pi_0\left(Sh_K(G,X)\right) \cong T(\mathbb{Q})^{\dagger} \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)$$

Man kann zeigen, dass RHS endlich ist

6. Nulldim. Shimura Varietäten

22. Definition

T: Torus, $h : \mathbb{C}^{\times} \to T(\mathbb{R})$, $K \subseteq T(\mathbb{A}_f)$

$$Sh_K(T, \{h\}) := T(\mathbb{Q}) \backslash \{h\} \times T(\mathbb{A}_f)/K$$
$$\cong T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K$$

Allgemeiner: Y endliche Menge s.d. $T(\mathbb{R})/T(\mathbb{R})^{\dagger} \curvearrowright Y$, dann

$$Sh_K(T,Y) := T(\mathbb{Q}) \backslash Y \times T(\mathbb{A}_f)/K$$

$$Sh(T,Y) = \varprojlim Sh_K(T,Y)$$

23. Lemma

(G,X): Shimura Datum s.d. G^{der} einfach zshgd., $T = G/G^{der}$ ein Torus, $Y = T(\mathbb{R})/T(\mathbb{R})^+$ endlich, $K \leq G(\mathbb{A}_f)$ komp. offen

$T(\mathbb{R})$ dicht in $T(G) \Rightarrow Y \cong T(G)/T(G)^+$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{=}}\\[2pt] \pi_0(Sh_K(G,X))}}{T(G)^+ \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)} \cong \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{=}}\\[2pt] Sh_{\nu(K)}(T,Y),}}{T(G) \backslash Y \times T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)}$$

$\Rightarrow \pi_0(Sh_K(G,X))$ Null-dim Shimura Varietät