Siegelsche Modulvarietäten

Wiederholung: Symplektische Räume

Regel: Jede Bilinearform ist nicht ausgeartet.

Definition (Symplektischer Raum)

Ein quadratischer Raum V über $\mathbb{Q}$ heißt symplektisch, falls es eine Basis (e_i) existiert mit

$$S_n = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{für die Gram-Matrix } S_n = (\psi(e_i, e_j)),$$

wobei $\psi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$

Definition (Verallgemeinerte Symplektische Gruppe)

Sei (V, ψ) symplektischer Raum. Die verallgemeinerte symplektische Gruppe $GSp(\psi)$ ist gegeben durch

$$GSp(\psi)(k) = \{ g \in GL(V) : \psi(gu, gv) = \nu(g)\psi(u,v),\ \nu(g) \in k^\times \}$$

Die Abbildung $\nu : GSp(\psi) \to \mathbb{G}_m,\ g \mapsto \nu(g)$ ist ein Homomorphismus.

Wir setzen

$$Sp(\psi)(k) = \ker(\nu)$$

Bemerkung

$Sp(\psi)$ wirkt transitiv auf die Menge der symplektischen Basen.

Beispiel

Für $V = k^{2n}$ und $\psi(u,v) = v^t S_n u$ gilt

$$GSp_{2n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(k) : A^t C = C^t A,\ B^t D = D^t B,\ AD - BC = \nu(g) 1_n \right\}$$

$\overset{n=1}{\Longrightarrow}$ $GSp_2(k) = GL_2(k)$ und $Sp_2(k) = SL_2(k)$.

Das Siegelsche Shimura Datum

Erinnerung: Shimura-Datum (G, X) mit

- G reduktive Gruppe
- X $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklassen von $h: \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$

mit folgendem Axiomen

(SV1): $h \in X \Rightarrow$ Hodge-Struktur auf $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ definiert über $\mathrm{Ad} \circ h$ ist vom Typ $\{(-1,0),(0,0),(1,-1)\}$

(SV2) $h \in X$: $\mathrm{ad}(h(i))$ ist eine Cartan-Involution auf $G_{\mathbb{R}}^{ad}$

(SV3) G^{ad} hat keine $\mathbb{Q}$-Faktoren, worauf die Projektion von h trivial ist.

Weitere Axiome:

(SV2*) $h \in X$: $\mathrm{ad}(h(i))$ ist Cartan-Inolution auf $G_{\mathbb{R}}/w_X(\mathbb{G}_m)$

(SV4) $w_X: \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{R}}$ ist definiert über $\mathbb{Q}$

(SV5) Das Zentrum $Z(\mathbb{Q})$ ist diskret in $Z(\mathbb{A}_f)$

(SV6) Torus Z^0 zerlegt sich über einen CM-Körper

<u>Ziel</u>: Konstruktion eines Shimura Datum, dass (SV1)-(SV6) erfüllt.

Wiederholung:

$x_X = h|_{\mathbb{G}_m}$ ← diese Definition ist wohldefiniert, da unabhängig für das gewählte $h \in X$.

- $h(z)v = z^{-p}\bar{z}^{-q}v$ für $v \in V^{p,q}$, $z \in \mathbb{S}$

Konstruktion der Konjugationsklassen

Ab jetzt: Fixiere symplektischen Raum (V, Ψ)

Betrachte komplexe Strukturen J auf $V(\mathbb{R})$ mit

$$\psi(Ju, Jv) = \psi(u, v) \qquad (*)$$

Definition

J heißt positiv (bzw. negativ), falls

$\Psi_J(u,v) := \psi(u, Jv)$ positiv (bzw. negativ) definit ist.

Wir setzen:

- X^+ = Menge positiver komplexer Strukturen J mit $(*)$
- X^- = " negativer "

Die verallgemeinerte symplektische $GSp(\Psi)(\mathbb{R}) \overset{G(\mathbb{R})}{=}$ operiert auf X durch Konjugation

$$(g, J) \mapsto gJg^{-1}.$$

Stabilisator auf X^+ ist durch

$$G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R}) : \nu(g) > 0\}$$

Für eine symplektische Basis $(e_{\pm i})$ auf V definiere

$$Je_{\pm i} = \pm e_{\mp i}$$

Dann gilt

$$J^2 = -id \quad \text{und} \quad J \in X^+$$

$\Rightarrow$ J bildet ein komplexe Struktur

Wir halten eine Abbildung

$$\{\text{symplektische Basen von } (V, \Psi)\} \longrightarrow X^+$$

Abbildung equivariant unter der Wirkung von $Sp(\Psi)(\mathbb{R})$

$S(\mathbb{R}) = Sp(\Psi)(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X^+

$G(\mathbb{R})$ operiert transitiv

Setze für $J \in X$

$h_J : \mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{R}),\ x+iy \mapsto x+yJ$

Dann gilt

$h_{gJg^{-1}}(z) = g\, h_J(z) g^{-1}$

Dadurch können wir X mit $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklassen identifizieren durch

$J \mapsto h_J$

Satz

Das Paar (G, X) erfüllt (SV1) – (SV6).

Beweis

(SV5)+(SV6): Zentrum von G ist $\mathbb{G}_m$

$\Rightarrow$ ist schon über $\mathbb{Q}$ zerlegt und $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{G}_m(\mathbb{Q})$ ist dikret in $\mathbb{A}_f$.

(SV4): Erinnerung: $h(z)v = z^{-p}\bar{z}^{-q}v$ für $v \in V^{pq}$

$\Rightarrow h(r)v = rv$ für $v \in V^{-1,0}$ oder $v \in V^{0,-1}$

$\Rightarrow h|_{\mathbb{G}_m}$ ist Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ klar definiert über $\mathbb{Q}$.

(SV2)+(SV3): Siehe Milne

(SV1): Sei $h \in X$ und $V^+ = V^{-1,0}$ und $V^- = V^{0,-1}$

$\Rightarrow h(z)v = zv$ für $v \in V^+$ und $h(z)v = \bar{z}v$ für $v \in V^-$

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{End}(V(\mathbb{C})) = & \mathrm{Hom}(V^+, V^+) \oplus & \mathrm{Hom}(V^+, V^-) \oplus & \mathrm{Hom}(V^-, V^+) \oplus & \mathrm{Hom}(V^-, V^-) \\ h(z) & 1 & \bar{z}/z & z/\bar{z} & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathrm{Lie}(G) = \{ f \in \mathrm{Hom}(V,V) : \psi(f(u), v) + \psi(u, f(v)) = 0 \} \subseteq \mathrm{End}(V)$

$\Rightarrow$ ist vom Typ $(1,0), (0,0), (0,1)$

Abelsche Varietäten

Definition (Komplexer Torus)

Komplexe Mannigfaltigkeit M heißt komplexer Torus, falls es ein $\mathbb{Z}$-Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ existiert mit
$M \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$. (Wiederholung: $\mathbb{Z}$-Gitter: freie abelsche Gruppe vom Rang $2n$.)

Bemerkung

Für einen komplexen Torus $\mathbb{C}^n/\Lambda$ gilt
$H_1(M,\mathbb{Z}) \cong \Lambda$.
Durch den Isomorphismus $\mathbb{R}\otimes\Lambda \cong \mathbb{C}^n$ erhalten wir eine komplexe Struktur J auf $V = \mathbb{R}\otimes\Lambda$.
$\rightsquigarrow$ insbesondere auf $H_1(M,\mathbb{Z})$
$\rightsquigarrow$ erhalten somit eine Hodge-Struktur auf $H_1(M,\mathbb{Z})$ vom Typ $(-1,0),(0,-1)$

Definition (Riemannform)

Eine Riemannform auf M ist eine alternierende Bilinearform $\psi: \Lambda\times\Lambda \to \mathbb{Z}$, so dass gilt:
(i) $\psi_{\mathbb{R}}(Ju,Jv) = \psi_{\mathbb{R}}(u,v)$ für alle $u,v \in \mathbb{R}\otimes\Lambda$
(ii) $\psi_{\mathbb{R}}(u,Jv) > 0$ für alle $u \neq 0$

Definition (Polarisierung)

Ein komplexer Torus $\mathbb{C}^n/\Lambda$ ist polarisierbar, falls es eine Riemannform auf $\mathbb{C}^n/\Lambda$ existiert.

Satz

$\mathbb{C}^n/\Lambda$ projektiv $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^n/\Lambda$ polarisierbar.

Definition (Abelsche Varietät)

Abelsche Varietät A ist ein polarisierbarer komplexer Torus.

Satz von Riemann

Der Funktor $A \mapsto H_1(A,\mathbb{Z})$ ist eine Äquivalenz von den Kategorien

- Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$
- polarisierbare ganzzahlige Hodge-Strukturen vom Typ $(-1,0),(0,-1)$

Erinnerung: Eine Polarisierung auf einer Hodge-Struktur (V,h) mit Gewicht n ist multilineare Abb. $t: V^r \to \mathbb{R}$ mit

$$t(h(z)v_1,\dots,h(z)v_r) = (z\bar{z})^{-nr/2} \cdot t(v_1,v_2,\dots,v_r)$$

Bemerkung

ψ nicht-ausgeartete alternierende $\mathbb{R}$-Bilinearform auf V, J komplexe Struktur. Dann gilt

$\psi(Ju,Jv) = \psi(u,v)$ und ψ_J positiv-definit $\Leftrightarrow$ ψ Polarisierung von der Hodge-Struktur (V,h_J)

Siegelsche Modulvarietät als Moduliraum

Notation:

- $V_f(A) = H_1(A, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f$
- (V, ψ) symplektischer Raum über $\mathbb{Q}$
- $K \subseteq GSp(\psi)(\mathbb{A}_f)$

Definition

$\mathcal{M}_K$ ist die Menge der Tripel $(A, s, \eta K)$ mit

- A abelsche Varietät über $\mathbb{C}$
- s ist eine alternierende Form auf $H_1(A, \mathbb{Q})$, so dass s oder $-s$ eine Polarisierung auf $H_1(A, \mathbb{Q})$ ist.
- η ist ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \to V_f(A)$ unter dem ψ „korrespondiert" zu ein Vielfaches von s mit einem Element von $\mathbb{A}_f^\times$

Definition

$(A, s, \eta K) \simeq (A', s', \eta' K) \iff$ Isomorphismus $A \to A'$ mit
(i) s wird auf $c \cdot s'$ mit $c \in \mathbb{Q}^\times$
(ii) ηK wird auf $\eta' K$ abg.

Satz

$$Sh_K(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_K / \simeq$$

Bijektion.

Shimuravarietäten vom Hodge-Typ

Definition

Ein Shimura-Datum (G, X) ist vom Hodge-Typ, falls es ein symplektischen Raum (V, ψ) und einen injektiven Homomorphismus $\rho: G \hookrightarrow G(\psi)$, welcher X in $X(\psi)$ abbildet.