AG 2 – Blatt 1

Aufgabe 1

(1.) Sei $\mathcal{H} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

- $\mathcal{H}$ ist eine Garbe:

Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung und $f_i \in \mathcal{H}(U_i)$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$.

$\rightsquigarrow f_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ $\mathcal{O}_{U_i}$-linear.

Finde $f \in \mathcal{H}(U)$ [also $f : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$] mit $f|_{U_i} = f_i$.

Für $V \subseteq U$ muss folgendes Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d, "f_V"] & \prod_i \mathcal{F}(V \cap U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\prod_i f_{i,V\cap U_i}"] & \prod_{i,j} \mathcal{F}(V \cap U_i \cap U_j) \arrow[d, "\prod_{i,j} f_{i,V\cap U_i \cap U_j} = \prod_{i,j} f_{j,V\cap U_i \cap U_j}"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \prod_i \mathcal{G}(V \cap U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} \mathcal{G}(V \cap U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

Für jedes V gibt es nach Diagrammjagd genau ein f_V, das dieses Diagramm kommutativ macht. Damit sind alle f_V (und auch f) schon eindeutig festgelegt. Zeige nun, dass diese f_V wirklich einen Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln definieren.

Sei $W \subseteq V \subseteq U$, zur Abkürzung sei $V_i := V \cap U_i$, $W_i := W \cap U_i$.

Im Würfeldiagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_V"'] & & \prod_i \mathcal{F}(V_i) \arrow[dr] \arrow[dd, "\prod f_{i,V_i}" near start] & \\
& \mathcal{F}(W) \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "f_W"' near start] & & \prod_i \mathcal{F}(W_i) \arrow[dd, "\prod f_{i,W_i}"] \\
\mathcal{G}(V) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & \prod_i \mathcal{G}(V_i) \arrow[dr] & \\
& \mathcal{G}(W) \arrow[rr, hook] & & \prod_i \mathcal{G}(W_i)
\end{tikzcd}$$

Kommutieren fünf Seitenflächen:

↳ vorne und hinten nach Definition von f_V, f_W
↳ rechts, weil die f_i Garbenmorphismen sind
↳ oben und unten, weil nur Einschränkungen geschehen, nichts weiter

Diagrammjagd + $\mathcal{G}(W) \to \prod_i \mathcal{G}(W_i)$ injektiv $\Rightarrow$ links kommutiert auch

Also ist $f = (f_V)_{V \subseteq U}$ ein Garbenmorphismus $\mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$.

Der ist auch $\mathcal{O}_U$-linear, denn für $x \in \mathcal{F}(V)$, $a \in \mathcal{O}_U(V)$ gilt:

$$f_V(a \cdot x)|_{V_i} = f_{V_i}(a \cdot x|_{V_i}) = f_{i,V_i}(a|_{V_i} \cdot x|_{V_i})$$

$$\overset{f_i\ \mathcal{O}_{U_i}\text{-lin}}{=} a|_{V_i} \cdot f_{i,V_i}(x|_{V_i}) = (a \cdot f_V(x))|_{V_i} \quad \forall i \in I$$

$\Rightarrow f_V(ax) = a \cdot f_V(x)$.

- $\mathcal{O}_X$-Modul: Mache $\mathcal{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ zu einem $\mathcal{O}_X(U)$-Modul.

Sei $a \in \mathcal{O}_X(U)$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Für $V \subseteq U$ definiere

$$(af)_V : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(V), \quad s \longmapsto a|_V \cdot f_V(s)$$

Das gibt einen Garbenhomomorphismus, denn für $W \subseteq V \subseteq U$ gilt:

$$(af)_V(s)\big|_W = \left(a|_V \cdot f_V(s)\right)\big|_W = a|_W \cdot f_W(s|_W) = (af)_W(s|_W)$$

af ist offensichtlich $\mathcal{O}_U$-linear, also ist $af \in \mathcal{H}(U)$.

Mit dieser $\mathcal{O}_X(U)$-Operation wird $\mathcal{H}(U)$ zu einem $\mathcal{O}_X(U)$-Modul.

Zeige noch, dass diese mit Restriktion verträglich ist.

Sei $W \subseteq V \subseteq U$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $a \in \mathcal{O}_X(U)$, $s \in \mathcal{F}(W)$

$$\left((af)|_V\right)_W(s) = (af)_W(s) = a|_W \cdot f_W(s) = a|_V|_W \cdot (f|_V)_W(s)$$

$$= (a|_V \cdot f|_V)_W(s) \qquad \rightsquigarrow (af|_V)_W = (a|_V \cdot f|_V)_W \quad \forall W$$

$$\rightsquigarrow af|_V = a|_V \cdot f|_V$$

(2) Definiere einen Morphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{G}$$

$$(f \in \mathcal{H}(U)) \longmapsto f_U(1) \qquad 1 \in \mathcal{O}_U(U)$$

also $f : \mathcal{O}_U \to \mathcal{G}|_U$

Garbenhom: Sei $V \subseteq U \subseteq X$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$ $\qquad 1 \in \mathcal{O}_U(V)$

$$\Phi_U(f)|_V = f_U(1)|_V = f_V(1|_V) = \Phi_V(1)$$

$\mathcal{O}_X$-linear: Sei $U \subseteq X$, $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$, $a \in \mathcal{O}_X(U)$

$$\Phi_U(af) = (af)_U(1) = a|_U \cdot f_U(1) = a \cdot \Phi_U(f)$$

Für $U = \mathrm{Spec} R \subseteq X$ affin-offen hat man

$$\mathcal{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\tilde{R}, \mathcal{G}|_U) \underset{\text{AG1}}{\cong} \mathrm{Hom}_R(R, \mathcal{G}(U)) \cong \mathcal{G}(U)$$

$$f \longmapsto f_U \longmapsto f_U(1) = \Phi_U(f)$$

In diesem Fall ist also Φ_U ein Isomorphismus. Die affin-offenen bilden eine Basis von X, also ist Φ ein Isomorphismus auf jedem Halm. $\Rightarrow \Phi$ Iso.

(3) Schritt I: $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ $\rightsquigarrow$ Aufgabenteil ?

Schritt II: $\mathcal{F}$ endlich frei, also $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^n$.

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{G}|_U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{G}|_U)^n$$

$$= \left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)\right)^n$$

Also ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})^n$ ein Produkt von quasikohärenten Garben, also selbst quasikohärent.

Schritt III: $\mathcal{F}$ lokal frei

Sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei $\forall i$.

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_{U_i} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{U_i}}(\mathcal{F}|_{U_i}, \mathcal{G}|_{U_i})$ quasikohärent nach II

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ quasikohärent.

(4.) Teste auf geeigneter Überdeckung $\rightsquigarrow$ oBdA ist $X = \mathrm{Spec}\, R$ mit R noethersch und $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen endlichen (= endlich präsentierten) R-Modul M.

Wähle eine Präsentation $M = \mathrm{coker}(R^n \to R^m)$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \tilde{M} = \mathrm{coker}(\mathcal{O}_X^n \xrightarrow[f]{} \mathcal{O}_X^m)$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathrm{coker}(\mathcal{O}_U^n \xrightarrow[f]{} \mathcal{O}_U^m), \mathcal{G}|_U)$$

$$= \ker\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^m, \mathcal{G}|_U) \xrightarrow[f^*]{} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^n, \mathcal{G}|_U)\right)$$

$$= \ker\left(\mathcal{G}(U)^m \xrightarrow[f^T]{} \mathcal{G}(U)^n\right) = \ker(\mathcal{G}^m \xrightarrow[f^T]{} \mathcal{G}^n)(U)$$

Also ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \ker(\mathcal{G}^m \xrightarrow[f^T]{} \mathcal{G}^n)$ quasikohärent als Kern eines Morphismus von quasikohärenten Garben.

Wenn $\mathcal{G}$ kohärent ist, ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ Untergarbe der kohärenten Garbe $\mathcal{G}^m$, also selbst kohärent.

<u>Zusatz:</u> 1.4 ist falsch, wenn $\mathcal{F}$ nicht kohärent ist, sondern nur quasikohärent.

unendliche direkte Summe

Sei $X = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathbb{Z}}^{\oplus \mathbb{N}}$, $\mathcal{G} = \tilde{\mathbb{Z}}$.

Angenommen, $\mathcal{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ ist quasikohärent. Dann ist

$\mathcal{H} = \hat{A}$ für eine abelsche Gruppe und

$$A = \mathcal{H}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\times \mathbb{N}}$$

unendliches direktes Produkt!

$$\mathbb{Z}^{\times \mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = \mathcal{H}(D(2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{D(2)}}(\mathcal{F}|_{D(2)}, \mathcal{G}|_{D(2)})$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}\left(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]^{\oplus \mathbb{N}}, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\right) \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]^{\times \mathbb{N}}$$

Es gilt jedoch $\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]^{\times \mathbb{N}} \neq \mathbb{Z}^{\times \mathbb{N}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$: Das Element $(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots)$ ist links enthalten, aber nicht rechts, weil es keinen gemeinsamen Nenner für die Brüche gibt.

Aufgabe 2

① Wenn $\mathcal{G}$ endlich frei ist, also $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y^n$, dann ist

$$f^*\mathcal{G} = (f^*\mathcal{O}_Y)^n = (f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X)^n = \mathcal{O}_X^n$$ endlich frei vom

gleichem Rang.

Sei nun $\mathcal{G}$ lokal frei. Wenn $\mathcal{G}$ auf der Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ frei ist, ist $f^*\mathcal{G}$ frei auf der Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$

wegen $f^*\mathcal{G}|_{f^{-1}(U)} = \underbrace{f^*(\mathcal{G}|_U)}_{\text{frei nach oben.}}$.

Da f^* Isomorphien erhält, gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$\operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$, $[\mathcal{L}] \to [f^*\mathcal{L}]$.

Ad Gruppenhomomorphismus:

Zeige $f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \cong f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G})$ für quasikohärente $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$.

(Geht auch ohne quasikohärent, ist aber schwieriger)

Wenn $Y = \operatorname{Spec} R$ und $X = \operatorname{Spec} R'$ affin sind, sind $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G} = \tilde{N}$

für $M, N \in R\text{-Mod}$.

$$(M \otimes_R R') \otimes_{R'} (N \otimes_R R') \cong (M \otimes_R N) \otimes_R R'$$ gibt nach $\sim$:

$$f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \cong f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G})$$

Dieser Isomorphismus verträgt sich auch mit Lokalisierung, d.h. das folgende Diagramm kommutiert für $S \subseteq R$

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R R') \otimes_{R'} (N \otimes_R R') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (M \otimes_R N) \otimes_R R' \arrow[d] \\
(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R') \otimes_{S^{-1}R'} (S^{-1}N \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R') \arrow[r, "\sim"] & (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N) \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R'
\end{tikzcd}$$

Für allgemeine X, Y wähle eine affin-offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$.
Auf affin-offenen $U \subseteq X$, die in einem $f^{-1}(V_i)$ enthalten sind, hat man nach oben einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\varphi_U : (f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})|_U &\cong (f|_U^* \mathcal{F}|_{V_i}) \otimes_{\mathcal{O}_U} (f|_U^* \mathcal{G}|_{V_i}) \\
&\cong f|_U^* (\mathcal{F}|_{V_i} \otimes_{\mathcal{O}_{V_i}} \mathcal{G}|_{V_i}) \\
&\cong f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G})|_U
\end{aligned}$$

Zeige noch für zwei solche Mengen U, U', dass $\varphi_U|_{U \cap U'} = \varphi_{U'}|_{U \cap U'}$ gilt.
Dann verkleben sich alle φ_U zu einem $\varphi : f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G})$.
Man kann $U \cap U'$ überdecken mit W_i, $i \in I$, die standard-offen in U und in U' sind (AG1). Weil die φ_U sich mit Lokalisierung vertragen, ist

$$\varphi_U|_{W_i} = \varphi_{W_i} = \varphi_{U'}|_{W_i} \quad \forall i, \text{ also } \varphi_U|_{U \cap U'} = \varphi_{U'}|_{U \cap U'}.$$

② Nutze mehrfach die Adjunktion $f^* \dashv f_*$, d.h.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(-, f_*-).$$

$f_*\mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}} f_*\mathcal{F}$ entspricht also einem $\varepsilon : f^*f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$

Das gibt $\varepsilon \otimes 1_{f^*\mathcal{G}}$:

$$\begin{tikzcd}
f^*f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\!\wr \text{①}"] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \\
f^*(f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}) &
\end{tikzcd}$$

Nach Adjunktion entspricht das einem

$$\phi : f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \longrightarrow f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$$

Sei jetzt $\mathcal{G}$ lokal frei.

Auf genügend feine Überdeckung einschränken $\rightsquigarrow$ oBdA $\mathcal{G}$ frei

Alles verträgt sich mit Summen $\rightsquigarrow$ oBdA $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$

$\rightsquigarrow f^*\mathcal{G} = \mathcal{O}_X$

Konstruktion ist jetzt:

$$\begin{tikzcd}
f^*(f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}) \arrow[r, "\sim", "\text{①}"'] & f^*f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}} \otimes 1"] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \arrow[d, "\sim"] \\
& f^*f_*\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Auf die obere Zeile (die jetzt im Endeffekt $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ ist) wendet man wieder die Adjunktion an, also sollte im Wesentlichen $\mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}}$ rauskommen.

Das ist ein Iso.

Genauer:

$$\begin{tikzcd}
f^*(f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}) \arrow[r, "①", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "f^*\alpha"'] & f^*f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \arrow[r, "\varepsilon_\mathcal{F} \otimes 1"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G} \arrow[d, "\beta", "\sim"'] \\
& f^*f_*\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_\mathcal{F}"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Von $\alpha: f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} f_*\mathcal{F}$

Aus der Konstruktion in ① kann man sehen, dass das Dreieck links kommutiert. $\varepsilon_\mathcal{F}$ ist adjungiert zu $id_{f_*\mathcal{F}}$. Nach Diagramm ist die obere Zeile $\beta^{-1} \circ \varepsilon_\mathcal{F} \circ f^*\alpha$. Wegen Natürlichkeit* der Adjunktion ist das adjungiert zu $f_*\beta^{-1} \circ id_{f_*\mathcal{F}} \circ \alpha = f_*\beta^{-1} \circ \alpha$, einem Iso.

* Natürlichkeit der Adjunktion bedeutet, dass für Garbenmorphismen $a: \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ und $b: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ man ein kommutatives Diagramm hat:

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) \arrow[d] & \psi \arrow[d, mapsto] \\
b \circ \varphi \circ f^*a & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}', \mathcal{G}') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}', f_*\mathcal{G}') & f_*b \circ \psi \circ a
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3

Irreduzible abgeschlossene Teilmengen von U entsprechen genau den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X, die nicht vollständig in Y enthalten sind. Kodimension bleibt dabei erhalten. Damit ist

$$U^1 = X^1 \setminus \{Y\}, \text{ also } \quad Z^1(U) = \bigoplus_{x \in U^{(1)}} \mathbb{Z}x = \bigoplus_{\substack{x \in X^{(1)} \\ x \neq Y}} \mathbb{Z}x .$$

Es gibt also eine exakte Sequenz:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{Y} Z^1(X) \longrightarrow Z^1(U) \longrightarrow 0$$

Das ergibt ein Diagramm mit exakten Zeilen:

$K = X_\eta$, η generischer Punkt

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{div}_X"] & K^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{div}_U"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "Y"] & Z^1(X) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & Z^1(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Es kommutiert wegen

$$\mathrm{res}(\mathrm{div}_X(a)) = \mathrm{res}\Big(\sum_{x \in X^1} v_x(a) \cdot x\Big) = \sum_{x \in X^1} v_x(a) \cdot \underbrace{\mathrm{res}(x)}_{\substack{0 \text{ für } x = Y \\ x \text{ sonst}}} = \sum_{x \in U^1} v_x(a) \cdot x = \mathrm{div}_U(a)$$

für $a \in K^\times$.

Die induzierte Sequenz der Kokerne in $(*)$ (Schlangenlemma oder so...) gibt

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{Y} CH^1(X) \longrightarrow CH^1(U) \longrightarrow 0.$$

Aufgabe 4

① Sei P endlich projektiv über R. Dann ist P direkter Summand eines freien Moduls F. Dann ist F torsionsfrei, also auch der Untermodul P.

Nach Struktursatz sind endliche torsionsfreie R-Moduln frei.

② Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$, insbesondere kohärent. Dann ist $\mathcal{L} \cong \widetilde{P}$ für einen endlichen $k[T]$-Modul P. P ist lokal frei, also projektiv. Nach Teil 1. ist P frei, also $P \cong R$. $\Rightarrow \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_R$. Also $\operatorname{Pic} \mathbb{A}^1_k$ trivial.

③ Erst etwas Notation:

- $\mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj}\ k[X_0, X_1]$ $\qquad X := \frac{X_1}{X_0}$
- $U_0 := D_+(X_0) = \operatorname{Spec}\left(k[X_0,X_1]_{X_0}\right)_0 = \operatorname{Spec} k[X_0^{\pm 1}, X_1]_0 = \operatorname{Spec} k[X]$
- $U_1 := D_+(X_1) = \operatorname{Spec} k[X^{-1}]$
- $U := U_0 \cap U_1 = \operatorname{Spec}\left(k[X_0, X_1]_{X_0,X_1}\right)_0 = \operatorname{Spec} k[X_0^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}]_0 = \operatorname{Spec} k[X, X^{-1}]$

Definiere für $n \in \mathbb{Z}$ eine Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(n)$ durch:

Auf U_0 nehme $\mathcal{O}_{U_0} = \widetilde{k[X]}$

Auf U_1 nehme $\mathcal{O}_{U_1} = \widetilde{k[X^{-1}]}$

Auf U verklebe beide entlang dem Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{U_0}|_U = \mathcal{O}_U \xrightarrow[\sim]{\cdot X^{-n}} \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{U_1}|_U$$

Auf der Überdeckung $\mathbb{P}^1_K = U_0 \cup U_1$ wird $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ frei vom Rang 1, also $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)] \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}^1_K$. Definiere $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic} \mathbb{P}^1_K$, $n \longmapsto [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)]$.

- φ ist Gruppenhomomorphismus:

Beschreibe das Tensorprodukt auf den Klebedaten.

Garbe auf $\mathbb{P}^1$	$\hat{=}$	(Garbe auf U_0,	Garbe auf U_1,	Iso zwischen beiden auf U)
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$	$\hat{=}$	$(\mathcal{O}_{U_0},$	$\mathcal{O}_{U_1},$	$\mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot X^{-n}} \mathcal{O}_U)$
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$	$\hat{=}$	$(\mathcal{O}_{U_0},$	$\mathcal{O}_{U_1},$	$\mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot X^{-m}} \mathcal{O}_U)$
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$	$\hat{=}$	$(\mathcal{O}_{U_0} \otimes \mathcal{O}_{U_0},$	$\mathcal{O}_{U_1} \otimes \mathcal{O}_{U_1},$	$\mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U \xrightarrow{X^{-n} \otimes X^{-m}} \mathcal{O}_U \otimes \mathcal{O}_U)$
				$\Vert\wr$ via zusammenmultiplizieren
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+m)$	$\hat{=}$	$(\mathcal{O}_{U_0},$	$\mathcal{O}_{U_1},$	$\mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot X^{-n-m}} \mathcal{O}_U)$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$

$\Rightarrow \varphi(n+m) = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+m)] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)] = \varphi(n)\varphi(m)$

- φ ist injektiv:

Angenommen, $\ker \varphi \neq 0$. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ für ein $n > 0$. $\Rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n), \mathbb{P}^1) \cong \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathbb{P}^1) = K$

Nach Definition von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ ist aber

$$\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n), \mathbb{P}^1) \cong \left\{ (\alpha,\beta) \in \Gamma(\mathcal{O}_{U_0}, U_0) \times \Gamma(\mathcal{O}_{U_1}, U_1) : \begin{array}{c} \Gamma(\mathcal{O}_U, U) \xrightarrow{\cdot X^{+n}} \Gamma(\mathcal{O}_U, U) \\ \alpha|_U \longmapsto \beta|_U \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (\alpha,\beta) \in k[X] \times k[X^{-1}] : \underbrace{\alpha \cdot X^n}_{\substack{\text{hat Monome} \\ X^n, X^{n+1}, X^{n+2}, \dots \\ (n>0)}} = \underbrace{\beta}_{\substack{\text{hat Monome} \\ X^0, X^{-1}, X^{-2}, \dots}} \text{ in } k[X, X^{-1}] \right\}$$

$$= 0$$

$$\lightning$$

- φ ist surjektiv:

Sei $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-Modul. Nach Teil 2 gibt es Isomorphismen $\alpha: \mathcal{L}|_{U_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_0}$ und $\beta: \mathcal{L}|_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_1}$.

Das gibt einen komponierten Isomorphismus

$$\gamma: \mathcal{O}_U \xrightarrow[\sim]{\alpha|_U^{-1}} \mathcal{L}|_U \xrightarrow[\sim]{\beta|_U} \mathcal{O}_U$$

Damit kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}|_U \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha|_U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{L}|_U \arrow[d, "\beta|_U"] \\ \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{U_0}|_U \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{O}_{U_1}|_U = \mathcal{O}_U \end{tikzcd}$$

Also bilden $\alpha: \mathcal{L}|_{U_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_0}$, $\beta: \mathcal{L}|_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_1}$ einen Isomorphismus

$$\underbrace{(\mathcal{L}|_{U_0}, \mathcal{L}|_{U_1}, \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{L}|_U)}_{\text{Klebedatum zu } \mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_U \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_U)$$

von Klebedaten.

$$\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_U}(\widetilde{k[X,X^{-1}]}) \cong \mathrm{Aut}_{k[X,X^{-1}]}(k[X,X^{-1}]) \cong k[X,X^{-1}]^\times$$

$= \{aX^n : a \in k^\times, n \in \mathbb{Z}\}$

Also ist $\gamma : \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ gegeben durch Multiplikation mit aX^n, $a \in k^\times$, $n \in \mathbb{Z}$.

Nun ist $a \in k[X]^\times \overset{\text{wie oben}}{=} \dots = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{U_0}}(\mathcal{O}_{U_0})$, also hat man Isomorphismen $a : \mathcal{O}_{U_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_0}$ und natürlich $1 : \mathcal{O}_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_1}$. Beide zusammen ergeben den Isomorphismus

$$(a,1) : (\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_U \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_U) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot X^n} \mathcal{O}_U),$$

denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_U \arrow[r, "\gamma", "a\cdot X^n"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{O}_U \arrow[d, "1"] \\
\mathcal{O}_U \arrow[r, "X^n"'] & \mathcal{O}_U
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Insgesamt:

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{L}|_{U_0}, \mathcal{L}|_{U_1}, \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{L}|_U) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_U \xrightarrow{\cdot X^n} \mathcal{O}_U) \\
\cong & & \cong \\
\mathcal{L} & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)
\end{array}$$

Also ist $[\mathcal{L}] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)] = \varphi(-n)$.