

Blatt 2

Aufgabe 1 Lokalisierungen von faktoriellen Ringen sind faktoriell.

Also ist $\text{Spec } R$ noethersch und lokal faktoriell.

$$\Rightarrow \text{Pr}(\text{Spec } R) \cong \text{Ch}^1(\text{Spec } R).$$

Die Weil-Primdivisoren entsprechen genau den Primidealen der Höhe 1 in R . Nach Vorlesung sind das genau die primen Hauptideale, also (p) mit $p \in R$ prim. Wenn $(p_i)_{i \in I}$ ein Vertretersystem der Primelemente bis auf Assoziierte ist, dann ist also
$$\mathbb{Z}^1(\text{Spec } R) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \cdot v(p_i) \cong \mathbb{Z}^{\oplus I}.$$

Berechne $\text{div}(p_i)$: $v_{p_j}(p_i)$ ist die Bewertung von p_i im diskreten Bewertungsring $R_{(p_j)}$. Für $i \neq j$ ist $p_i \notin (p_j)$, also eine Einheit in $R_{(p_j)}$ $\Rightarrow v_{p_j}(p_i) = 0$.

In $R_{(p_i)}$ ist p_i das Primelement, also $v_{p_i}(p_i) = 1$

$$\Rightarrow \text{div } p_i = \sum_{j \in I} v_{p_j}(p_i) \cdot v(p_j) = 1 \cdot v(p_i)$$

$\mathbb{Z}^1(\text{Spec } R)$ wird von diesen Elementen erzeugt, also ist

$$\text{div} : \text{Quot } R \rightarrow \mathbb{Z}^1(\text{Spec } R) \text{ surjektiv} \Rightarrow \text{Ch}^1(\text{Spec } R) = 0$$

Aufgabe 2

① Für jedes $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_{\text{Spec } B}\text{-Mod}$ gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\text{Spec } B}}(f^* \tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\text{Spec } A}}(\tilde{\mathcal{M}}, f_* \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_A(M, f_* \mathcal{N}(\text{Spec } A))$$

$$= \text{Hom}_A(M, \underbrace{\mathcal{N}(\text{Spec } B)}_{\substack{\text{ist sogar} \\ B\text{-Modul}}}) \cong \text{Hom}_B(M \otimes_A B, \mathcal{N}(\text{Spec } B))$$

$$\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\text{Spec } B}}(\widetilde{M \otimes_A B}, \mathcal{N})$$

Nach Yoneda ist $f^* \tilde{\mathcal{M}} \cong \widetilde{M \otimes_A B}$

② I: Für jede Garbe $\mathcal{G}$ auf X ist $j^* \mathcal{G} = \mathcal{G}|_U$.

Für $V \in U$ offen gilt:

$$j^{-1,p} \mathcal{G}(V) = \lim_{\substack{W \supseteq j(V) \\ \text{offen in } X}} \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(j(V)) = \mathcal{G}|_U(V)$$

↑
Prägarben-
erbild

← $j(V)$ ist schon offen in X

→ Die geordnete Menge, über die der Limes gebildet wird, hat finales (= kleinstes) Element, nämlich $j(V)$.
→ $\{j(V)\}$ ist cofinale Teilmenge

$$\Rightarrow j^{-1,p} \mathcal{G} = \mathcal{G}|_U \text{ ist schon eine Garbe} \Rightarrow j^* \mathcal{G} = j^{-1,p} \mathcal{G} = \mathcal{G}|_U$$

$$\text{II: } j^* \mathcal{F} = j^{-1} \mathcal{F} = \mathcal{F}|_U$$

Die zweite Gleichung ist einfach I.

$$j^*F = j^*F \otimes_{j^*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U \stackrel{\text{I}}{=} F|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_U = F|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_U \cong F|_U.$$

zweimal

③ Wenn X und Y beide affin sind, stimmt die Aussage nach ①

Für beliebige X, Y wähle affin-offene Überdeckungen $(U_i)_{i \in I}$ von X und

$(V_i)_{i \in I}$ von Y mit $g(U_i) \subseteq V_i$ (Überdecke erst Y , dann die Urbilder der Überdeckungsmengen).

Seien $j_i: U_i \hookrightarrow X$ und $j'_i: V_i \hookrightarrow Y$ die offenen Einbettungen

und $g_i = g|_{U_i}: U_i \rightarrow V_i$ die Einschränkung von g . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{g_i} & V_i \\ j_i \downarrow & & \downarrow j'_i \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$$\Rightarrow (g^*F)|_{U_i} = j_i^* g^* F = (g \circ j_i)^* F = (j'_i \circ g_i)^* F = g_i^* (j'_i)^* F = g_i^* (F|_{V_i})$$

Das ist quasi-kohärent nach dem affinen Fall. Also g^*F quasi-kohärent.

Aufgabe 3

① Versien 1, analog zu Fall $\text{Spa } R$ aus der Vorlesung

Sei $Y \subseteq X$ ein Weil-Primdivisor, also abgeschlossen, irreduzibel, Kodim 1.

Es ist $Y = V_+(y)$ für ein homogenes Primideal $y \subseteq K[T_i, 0 \leq i \leq n] =: R$.

Sei $f \in y \setminus \{0\}$. R ist faktoriell, also gibt es eine PFZ

$$f = a \cdot \prod_{i=1}^r q_i^{v_i} \quad \text{mit } a \in K^\times, q_i \in R \text{ irreduzibel und pw. nicht assoziiert, } v_i \in \mathbb{N}.$$

y ist prim, also gibt es ein $i \in I$ mit $q_i = q_i \in y$. Zeige noch, dass

q homogen ist, denn hat man $P_K^n = V_+(0) \neq V_+(q) \supseteq V_+(y) = Y$.

Wegen Kodimension 1 ist $Y = V_+(q)$.

Ad q homogen:

Da K nullteilerfrei ist, ist $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$. Analoges gilt

für $\deg: f \mapsto \inf \{n \in \mathbb{N}_0 : \text{homogene Stufe } f_n \neq 0\}$

Sei $\text{spu } f := \deg f - \deg f \geq 0$ für $f \in R \setminus \{0\}$. Dann ist

$\text{spu}(f \cdot g) = \text{spu } f + \text{spu } g$. Ein Polynom ist genau dann homogen,

wenn $\text{spu} = 0$ ist.

In der Situation oben ist also

$$0 = \text{spu } f = \text{spu } a + \sum_{i=1}^r v_i \cdot \text{spu } q_i \quad \Rightarrow \quad \text{spu } q_i = 0 \quad \forall i,$$

also alle q_i homogen

Version 2, Einschränkung auf Standardüberdeckung und Homogenisierung

Y schneidet sich nicht-trivial mit mindestens einer Standardüberdeckungs-
menge $D_+(T_i)$, oBdA mit $U = D_+(T_0)$. Sei $y \in Y$ der generische
Punkt. Dann ist $y \in U$ und $1 = \text{codim}_X Y = \dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{U,y} = \text{codim}(Y \cap U)$.

Also ist $Y \cap U$ ein Primdivisor in $U = \text{Spec } R_{(T_0)} = \text{Spec } k[X_i : 1 \leq i \leq n]$

mit $X_i = \frac{T_i}{T_0}$. Nach Vorlesung ist $Y \cap U = V(p)$ mit

$p \in R_{(T_0)}$ irreduzibel. Sei $d = \deg p$ und $q := T_0^d p$.

Dann werden die T_0 -Nenner von p gerade gekürzt, sodass $q \in R$.

Außerdem ist q homogen vom Grad d in den T_i und es ist $T_0 \nmid q$.

q ist irreduzibel, denn eine Faktorisierung $q = f \cdot g$ gibt

$p = q(1, X_1, X_2, \dots, X_n) = f(1, X_1, \dots, X_n) \cdot g(1, X_1, \dots, X_n)$, aber p ist irreduzibel.

Zeige nun $Y = V_+(q)$. Oben wurde die Isomorphie

$$\text{Spec } R_{(T_0)} \cong \{q \in \text{Spec } R_{T_0} \text{ homogen}\} \cong D_+(T_0) \subseteq \text{Proj } R$$

liberal als Gleichheit geschrieben, jetzt braucht man aber die konkrete

Beschreibung aus AG1:

$$q \longmapsto \sqrt{q \cdot R_{T_0}} \longmapsto \sqrt{q \cdot R_{T_0}} \cap R$$

Der zu $(p) \in \text{Spec } R_{(T_0)}$ gehörige Punkt in $U \subseteq \text{Proj } R$ ist also

$$\sqrt{p \cdot R_0} \cap R = \sqrt{q \cdot R_0} \cap R = q R_0 \cap R = q R = (q)$$

$\uparrow$
 T_0 Einheit
in R_0

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 prim, da
 q irred,
 $T_0 \nmid q$

In $\text{Spec } R_{(T_0)} = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ aufgefasst hat $Y \cap U = V(p)$ den generischen Punkt (p) . In $D_+(T_0) \in \text{Proj } R$ aufgefasst ist der generische Punkt also (q) .

$$\Rightarrow Y = \overline{Y \cap U}^X = \overline{\{ (q) \}^U}^X = \overline{\{ (q) \}}^X = V_+(q)$$

$\swarrow$ Abschluss in X

② $\mathbb{P}_k^n$ wird von Spektren $D_+(T_i)$ von noetherschen faktoriellen Ringen $k[x_1, \dots, x_n]$ endlich überdeckt, also ist $\mathbb{P}_k^n$ noethersch und lokal faktoriell.

$$\Rightarrow \text{Pic } \mathbb{P}_k^n \stackrel{\cong}{=} \text{CH}^1(\mathbb{P}_k^n) = \mathbb{Z}^1(\mathbb{P}_k^n) / \sim \text{div}$$

Es gibt offensichtlich einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi_0: \mathbb{Z}^1(\mathbb{P}_k^n) \rightarrow \mathbb{Z}$, $Y \mapsto \deg Y$. Dieser ist surjektiv wegen $1 = \deg T_0 = \deg V_+(T_0) \in \text{im } \varphi_0$.

Zeige noch, dass φ_0 über $\text{CH}^1(\mathbb{P}_k^n)$ faktorisiert, also $\varphi_0 \circ \text{div} = 0$.

$$\text{div} \text{ startet auf } \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n, \eta} = \mathcal{O}_{D_+(T_0), \eta} = \mathcal{O}_{A_{k, \mathbb{Z}}^n} = \text{Quot } k[x_1, \dots, x_n]$$

$\nwarrow$ gen. Punkt

$$= k(x_1, \dots, x_n) = k\left(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}\right)$$

$$= \left\{ \frac{P}{Q} : P, Q \in k[T_0, \dots, T_n] \text{ homogen, } \deg P = \deg Q \right\}$$

Wie in Aufgabe 1. sind die Bewertungen durch die Exponenten in der Primfaktorzerlegung gegeben. Beachte dabei, dass wie in ①, V_1 die Primfaktorzerlegung eines homogenen Polynoms nur aus homogenen Polynomen besteht.

Sei $\frac{P}{Q}$ aus dem Funktionenkörper mit PFZ $P = a \prod_{i=1}^r p_i^{v_i}$, $Q = \prod_{i=1}^s q_i^{w_i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi_0(\operatorname{div} \frac{P}{Q}) &= \varphi_0\left(\sum_{i=1}^r v_i \cdot V_+(p_i) - \sum_{i=1}^s w_i \cdot V_+(q_i)\right) = \sum_{i=1}^r v_i \cdot \deg p_i - \sum_{i=1}^s w_i \cdot \deg q_i \\ &= \deg \prod_{i=1}^r p_i^{v_i} - \deg \prod_{i=1}^s q_i^{w_i} = \deg P - \deg Q = 0 \end{aligned}$$

③ In Aufgabe 1.3 setze $X = \mathbb{P}_k^n$, $Y = V_+(T_0)$, $U = D_+(T_0) \cong \mathbb{A}_k^n$.

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot Y} CH^1(\mathbb{P}_k^n) \longrightarrow CH^1(\mathbb{A}_k^n) \longrightarrow 0$$

$\downarrow \cong$
 $\text{Pic } \mathbb{P}_k^n$

$\parallel$
 0
 nach Aufg. 1

$$\leadsto \varphi: \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot Y} CH^1(\mathbb{P}_k^n) \text{ surj.}$$

Zusatz: Die Morphismen aus ② und ③ sind zueinander inverse Iso

$$\text{Für } \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} CH^1(\mathbb{P}_k^n) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \text{ gilt } \varphi(\psi(1)) = \varphi(Y) = \varphi(V_+(T_0)) = \deg T_0 = 1$$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi = \operatorname{id}_{\mathbb{Z}}$, insb. ψ inj. Wegen ③ ist φ bijektiv.

Als Linksinverses ist φ der inverse Iso.

Aufgabe 4

① (a) $v_x(s) < \infty \quad \forall x \in X^{(n)}$

Zeige, dass s in keinem Halm Null ist.

Wegen $s \neq 0$ gibt es ein affin-offenes $U = \text{Spec } R$ mit $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ und $s|_U \neq 0$. Am generischen Punkt η ist dann $s_\eta = (s|_U)_\eta = \frac{s}{1} \neq 0$.

Wäre nun $s_x = 0$ für ein $x \in X$, so wäre $s|_U = 0$ für eine affin-offene Umgebung U von x mit $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$. Dort gilt

$$s_\eta = (s|_U)_\eta = 0_\eta = 0 \quad \eta$$

Damit ist $s_x \neq 0 \quad \forall x \in X^{(n)} \rightarrow \alpha_x(s_x) \neq 0 \Rightarrow v_x(s) < \infty$.

(b) $v_x(s)$ unabhängig von α_x

$\mathcal{L}_x$ ist freier Modul vom Rang 1 über dem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{X,x}$. Zeige also, dass jeder Automorphismus von $\mathcal{O}_{X,x}$ als $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul die Bewertung erhält. Jeder

Endomorphismus $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{X,x}$ ist von der Form $\cdot a$, $a \in \mathcal{O}_{X,x}$.

Für Automorphismus muss $a \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ sein, also $v_x(a) = 0$.

$$\Rightarrow v_x(\varphi(b)) = v_x(ab) = v_x(a) + v_x(b) = v_x(b) \quad \checkmark$$

(c) $v_x(s) = 0$ für fast alle $x \in X^{(u)}$.

Überdecke X mit affin-offenen $U_i, i \in I$, sodass $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$.

X ist noethersch, also quasikompakt. Es genügt also eine

endliche solche Überdeckung $(U_i)_{i \in I_0}$. Also abh. $X = \text{Spec } R$,

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$. Dafür gabs die Endlichkeitsaussage schon in der Vorlesung
(siehe Konstruktion $\text{div} : K(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}^1(X)$)

② konstruiere eine Abbildung $\mathcal{L}(\text{divs}) \longrightarrow \mathcal{L}$

$$\bigcap_{\mathcal{L}(\text{divs})(U)} \xrightarrow{a \cdot s|_U} \bigcap_{\mathcal{L}(U)} \xrightarrow{a \cdot s|_U}$$

Es ist allerdings nicht klar, warum das wohldefiniert sein sollte,
schließlich kann ein $a \in \mathcal{L}(\text{divs})(U) \in K(X)$ nichttriviale Nenner haben.

Definiere dies erst auf schönen offenen Mengen und verklebe dann.

Sei $U = \text{Spec } R$ affin-offen ist mit $\mathcal{O}_U \cong \mathcal{L}|_U$ und
 $a \in \mathcal{L}(\text{divs})(U) \in K(X)$. Nach Identifikation von $\mathcal{L}(U)$ mit R

ist $a \cdot s \in K(X)$. Wegen $a \in \mathcal{L}(\text{divs})(U)$ ist $\text{div } a + \text{div } s|_U \geq 0$,

also $v_{\mathfrak{p}}(a \cdot s) = v_{\mathfrak{p}}(a) + v_{\mathfrak{p}}(s) \geq 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R von

Höhe 1. Das bedeutet $a \cdot s \in \bigcap_{\text{Höhe}=1} R_{\mathfrak{p}} \stackrel{\text{Satz}}{\underset{\text{a.s.v.}}{=}} R \cong \mathcal{L}(U)$.

Wenn $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in R$, dann ist das so erhaltene $a \cdot s|_U \in \mathcal{L}(U)$

das eindeutige Element mit $q \cdot a \cdot s_U = p \cdot s_U$. Das zeigt, dass $a \cdot s_U \in \mathcal{L}(U)$ unabhängig ist von der Wahl des Isomorphismus $\mathcal{L}_U \cong \mathcal{O}_U$ (wichtig!).

Verändert man a , so bekommt man einen Homomorphismus

$$\alpha_U : \mathcal{L}(\text{div } s)(U) \xrightarrow{\cdot s_U} \mathcal{L}(U) \cong R \quad \text{von } R\text{-Modulen}$$

$$\parallel$$

$$\left\{ a \in K(X) : \underset{\substack{\forall y \in \text{Spec } R \\ \text{ht } y = 1}}{v_y(a) + v_y(s) \geq 0} \right\}$$

Da s_U im multipl. freien Ring R liegt, ist α_U injektiv. Außerdem

$$\text{ist } \alpha_U \text{ surjektiv wegen } \underset{\substack{\forall y \in \text{Spec } R \\ \text{ht } y = 1}}{v_y(s_U^{-1}) + v_y(s) = 0}$$

$$\Rightarrow s_U^{-1} \in \mathcal{L}(\text{div } s)(U) \quad \text{mit} \quad \alpha_U(s_U^{-1}) = 1.$$

Wir haben nun Isomorphismen $\mathcal{L}(\text{div } s)(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{L}(U)$, $a \mapsto a \cdot s_U$ für

alle U aus der Basis der affin-offenen Mengen mit $\mathcal{L}_U \cong \mathcal{O}_U$. Da

diese Isomorphismen unabhängig von allen getroffenen Wahlen sind, vertragen sie sich auch mit Restriktion = Lokalisierung. Mit den üblichen

Argumenten verkleben sich die α_U zu einem Isomorphismus

$$\alpha : \mathcal{L}(\text{div } s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \quad \text{von Garben.}$$