Blatt 3

Aufgabe 1

① Sei $\underline{\alpha}=(\alpha_i)_{i\in I}$ Transzendenzbasis von L/K und $\underline{\beta}=(\beta_j)_{j\in J}$ Transzendenzbasis von M/L. Zeige: Zusammen ist das eine Transzendenzbasis von M/K.

<u>Algebraisch unabhängig:</u> Sei $\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}_0^{(I)}}\sum_{\underline{l}\in\mathbb{N}_0^{(J)}} a_{\underline{k},\underline{l}}\,\underline{\alpha}^{\underline{k}}\,\underline{\beta}^{\underline{l}}=0$ mit

Multiindexnotation für $\prod_{i\in I}\alpha_i^{k_i}$

$a_{\underline{k},\underline{l}}\in K$, fast alle 0.

$$\Rightarrow 0=\sum_{\underline{l}}\underbrace{\left(\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k},\underline{l}}\,\underline{\alpha}^{\underline{k}}\right)}_{\in L}\underline{\beta}^{\underline{l}}$$

$\underline{\beta}$ ist algebraisch unabhängig über L, also $\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k},\underline{l}}\,\underline{\alpha}^{\underline{k}}=0\ \forall\underline{l}$

$\underline{\alpha}$ ist algebraisch unabhängig über K, also $a_{\underline{k},\underline{l}}=0\ \forall\underline{k},\underline{l}$.

<u>maximal:</u> Sei $\gamma\in M$. Zeige, dass γ über $K(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ algebraisch ist.

kurz für $K(\alpha_i: i\in I;\ \beta_j: j\in J)$

$\underline{\beta}$ ist Transzendenzbasis von M/L, also ist γ algebraisch über $L(\underline{\beta})=K(\underline{\alpha},\underline{\beta})(L)$. $\underline{\alpha}$ ist Transzendenzbasis von L/K, also ist jedes Element aus L algebraisch über $K(\underline{\alpha})$, erst recht über $K(\underline{\alpha},\underline{\beta})$. Also ist $K(\underline{\alpha},\underline{\beta})(L)/K(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ algebraisch. Nach Transitivität ist γ algebraisch über $K(\underline{\alpha},\underline{\beta})$.

② Sei $\varphi : \Omega_{L/K} \otimes_L M \to \Omega_{M/K}$ die natürliche Abbildung und $C = \ker\varphi$.

Nach Vorlesung gibt es eine (weiße) exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \Omega_{L/K} \otimes_L M \xrightarrow{\varphi} \Omega_{M/K} \longrightarrow \Omega_{M/L} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow 0 = \dim_M C - \dim_M \Omega_{L/K} \otimes_L M + \dim_M \Omega_{M/K} - \dim_M \Omega_{M/L}$$

$$= \dim_M C - \dim_L \Omega_{L/K} + \dim_M \Omega_{M/K} - \dim_M \Omega_{M/L}$$

$$\overset{\substack{L/K,\\ M/K \\ \text{sep.}}}{=} \dim_M C - \operatorname{trdeg}(L/K) + \operatorname{trdeg}(M/K) - \dim_M \Omega_{M/L}$$

$$\overset{①}{=} \dim_M C + \operatorname{trdeg}(M/L) - \dim_M \Omega_{M/L}$$

$$\Rightarrow \dim_M C = \dim_M \Omega_{M/L} - \operatorname{trdeg}(M/L)$$

φ injektiv $\Leftrightarrow C = 0 \Leftrightarrow \dim_M C = 0 \Leftrightarrow \dim_M \Omega_{M/L} = \operatorname{trdeg}(M/L)$

$\overset{VL}{\Leftrightarrow}$ M/L separabel

Aufgabe 2

U ist noethersch und als offene Teilmenge von $\mathbb{P}^n_k$ lokal faktoriell, also $\operatorname{Pic} U \cong CH^1(U)$. $V(f)$ ist Primdivisor. In Aufgabe 1.3 ist mit $X = \mathbb{P}^n_k$, $Y = V(f)$ folgende Sequenz exakt:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot V(f)"] & CH^1(\mathbb{P}^n_k) \arrow[r] \arrow[d, "\deg"', "\sim"] & CH^1(U) \arrow[r] & 0 \\
& \mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

nach Aufg. 2.3

$$\Rightarrow CH^1(U) \cong \operatorname{coker}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\deg V(f)} \mathbb{Z}\right)$$
$$= \operatorname{coker}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{\deg f} \mathbb{Z}\right)$$
$$= \operatorname{coker}\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}\right)$$
$$= \mathbb{Z}/d$$

Aufgabe 3

$(A,\mathfrak{m}) \xrightarrow{\varphi} (B,\mathfrak{n})$ flach, lokal. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Surjektiven Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{p} \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ mit B tensorieren

gibt $B/\mathfrak{p}B \longrightarrow B/\mathfrak{m}B \underset{\uparrow \varphi \text{ lokal}}{=} B/\mathfrak{n}$, immer noch surjektiv.

$B/\mathfrak{n}$ ist der Restkörper von B, also nicht 0. Damit auch

$B/\mathfrak{p}B \neq 0$.

Injektiven Ringhomomorphismus $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Quot} A/\mathfrak{p} = \kappa(\mathfrak{p})$ mit B

tensorieren gibt $B/\mathfrak{p}B \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$, immer noch injektiv, da

φ flach ist. Also $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B \neq 0$.

Sei $S := A \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist:

$$0 \neq \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B = S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \otimes_A B \cong \varphi(S)^{-1}(B/\varphi(\mathfrak{p})B)$$

Der Ring rechts hat also ein Primideal. Das entspricht einem

Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \cap \varphi(S) = \emptyset$.

Daraus folgt $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{p}$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \setminus \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \emptyset$,

also $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Sei nun $f: X \to Y$ flach und $y = f(x) \in Y$ im Bild

$\rightsquigarrow$ kommutatives Quadrat:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, "i_x"'] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[d, "i_y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

mit $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ lokal und flach, also f_x surjektiv.

$\Rightarrow \operatorname{im} f \supseteq \operatorname{im} i_y \overset{(*)}{=} \{ z \in Y : y \in \overline{\{z\}} \} = \{ z \rightsquigarrow y \}$

Ad $(*)$: Wenn $Y = \operatorname{Spec} A$, $y = \mathfrak{p} \leq A$:

$\operatorname{im} i_y = \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} = \{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \}$ enthält genau die Generisierungen

Allgemein: Sei U affin-offene Umgebung von y. Dann hat

$i_y: \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{Y,y} \to U \hookrightarrow Y$ als Bild genau die Generisierungen von

y, die auch in U liegen. Das sind alle Generisierungen von y,

denn wäre $z \rightsquigarrow y$, $z \in \underbrace{Y \setminus U}_{\text{abg} \subseteq Y}$, so wäre $y \in \overline{\{z\}} \subseteq Y \setminus U$, also

$y \notin U$ ↯.

Aufgabe 4

① Wähle Präsentation $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2-2)$. Nach Vorlesung (kurz nach zweiter Differentialsequenz) ist $\Omega_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\mathbb{Z}}$ der $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-Modul, der von $d\alpha$ erzeugt wird, mit der Relation

$0 = d(\alpha^2-2) = 2\alpha \cdot d\alpha$.

$$\Rightarrow \Omega_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]\,d\alpha / 2\alpha \cdot d\alpha \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(2\sqrt{2})$$

Dieser Modul ist nicht lokal frei, denn er hat Torsion, etwa

$2 \cdot \sqrt{2} = 0$.

② Gleiches Vorgehen wie oben: $A = k[X,Y]/(XY)$

$$\Omega_{A/k} = (A \cdot dX + A \cdot dY) / (d(XY))$$
$$= (A \cdot dX + A \cdot dY) / (Y \cdot dX + X \cdot dY)$$

<u>Beh:</u> Das ist nicht lokal frei.

Angenommen doch. $\rightsquigarrow$ Der Modul $M := (\Omega_{A/k})_{(X,Y)} = \Omega_{A/k} \otimes_A A_{(X,Y)}$ ist ein freier $A_{(X,Y)}$-Modul vom Rang $n < \infty$.

$M \cong A_{(X,Y)}^n$.

Betrachte zuerst den Basiswechsel zu $A_{(X,Y)}/(X,Y) = A/(X,Y) = \underset{\uparrow\, X,Y \text{ op. als } 0}{k}$

$$k^n = A_{(X,Y)}^n \otimes_{A_{(X,Y)}} k = M \otimes_{A_{(X,Y)}} k = \Omega_{A/k} \otimes_A k$$
$$\cong (k \cdot dX + k \cdot dY) / (\underbrace{Y}_{0 \text{ in } k} dX + \underbrace{X}_{0 \text{ in } k} dY) = k \cdot dX + k \cdot dY \cong k^2 \quad \Rightarrow n = 2$$

Jetzt Basiswechsel zum Restkörper an (Y), also zu

$$\mathrm{Quot}\left(A_{(X,Y)}/(Y)\right) = \mathrm{Quot}\left(k[X,Y]/(Y)\right) = \mathrm{Quot}\left(k[X]\right) = k(X)$$

Y op als 0

$$k(X)^n = A_{(X,Y)}^n \otimes_{A_{(X,Y)}} k(X) = M \otimes_{A_{(X,Y)}} k(X) = \Omega_{A/k} \otimes_A k(X)$$

$$\cong (k(X)\cdot dX + k(X)\cdot dY) / (X dY + \underbrace{Y}_{0 \text{ in } k(X)} dX)$$

$$= (k(X)\cdot dX + k(X)\cdot dY) / (\underbrace{X}_{\text{Einheit in } k(X)} dY) \cong k(X) dX \cong k(X)$$

$\Rightarrow n = 1$ ↯

③ $A = k[X,Y]/(Y^2 - X^3 + X)$

$$\Omega_{A/k} = (A\cdot dX + A\cdot dY) / (d(Y^2 - X^3 + X))$$

$$= (A\cdot dX + A\cdot dY) / (2Y\cdot dY - 3X^2\cdot dX + dX)$$

Auf der offenen Menge $D(Y)$:

$$(\Omega_{A/k})_Y = (A_Y dX + A_Y dY) / (\underbrace{2Y}_{\text{Einheit in } A_Y}\cdot dY - 3X^2\cdot dX + dX)$$

$$= (A_Y dX + A_Y dY) / \left(dY - \frac{3X^2 - 1}{2Y} dX\right)$$

$$\cong A_Y dX \quad \text{ist frei.}$$

Auf der offenen Menge $D(3X^2 - 1)$:

$$(\Omega_{A/k})_{3X^2-1} = \left(A_{3X^2-1}\,dX + A_{3X^2-1}\,dY\right) \Big/ \left(dX - \frac{2Y}{3X^2-1}\,dY\right)$$

$$\cong A_{3X^2-1}\,dY \quad \text{ist frei.}$$

Wenn $\operatorname{Spec} A$ von $D(Y)$ und $D(3X^2-1)$ überdeckt wird, dann ist $\Omega_{A/k}$ lokal frei. In $\operatorname{Spec} k[X,Y]$ liegen die Punkte von $\operatorname{Spec} A$, die nicht überdeckt werden, in

$$V := V(Y^2-X^3+X) \cap V(Y) \cap V(3X^2-1) = V(\underbrace{Y^2-X^3+X,\ Y,\ 3X^2-1}_{})$$

Dieses Ideal enthält

$$9X\cdot(Y^2-X^3+X) - 9XY\cdot Y + (3X^2-2)(3X^2-1) = \ldots = 2 \in k^\times$$

$\Rightarrow V = \emptyset$. Also $\Omega_{A/k}$ lokal frei.

(4) $R = k[T]$, $A = k[T^{\frac{1}{p}}] \cong R[X]/(X^p - T)$

$$\Rightarrow \Omega_{A/R} = A\cdot dX / (d(X^p - T)) = A\cdot dX / (\underset{0}{p}X^{p-1}dX)$$

$$= A\cdot dX \cong A \quad \text{ist frei, also lokal frei.}$$