Blatt 04

Aufgabe 1

① Erst komposition:

$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ mit $f{\circ}g$ formal glatt, $I \subseteq R$ nilpotentes Ideal. Betrachte ein Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
& Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

oder in anderer Form:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "g\circ t"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "s_0"] & X
\end{tikzcd}$$

f formal glatt $\Rightarrow$ $s_0 : \operatorname{Spec} R \to Y$ mit $f \circ s_0 = h$, $s_0 \circ \iota = g \circ t$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "s_0"'] \arrow[ur, dashed, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

g formal glatt $\Rightarrow \exists\, s : \operatorname{Spec} R \to Z$ mit $s \circ \iota = t$, $g \circ s = s_0$

$$\Downarrow$$

$$f \circ g \circ s = f \circ s_0 = h$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "\iota"'] \arrow[ddr, phantom, "?" near start] & Z \arrow[d, "g"] \\
& Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[uur, "s"] \arrow[ur, phantom, "?" near end] & X
\end{tikzcd}$$

Also $f \circ g$ formal glatt.

Jetzt $f \circ g$ formal unverzweigt.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[dd, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
& Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[uur, shift left, "s"] \arrow[uur, shift right, "s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

Seien s, s' zwei Lifts im Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "g \circ t"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, shift left, "g \circ s"] \arrow[ur, shift right, "g \circ s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

f formal unverzweigt $\Rightarrow g \circ s = g \circ s'$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "g \circ s = g \circ s'"'] \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[ur, shift right, "s'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

g formal unverzweigt

$\Rightarrow s = s'$

Also $f \circ g$ formal unverzweigt.

formal étale = formal glatt + formal unverzweigt

Jetzt Basiswechsel:

Sei $f : X \longrightarrow S$ formal glatt,

$g : S' \longrightarrow S$ beliebig und

$X' = X \times_S S'$. $I \trianglelefteq R$ nilpotent.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\iota"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[urr, "s"] & S' \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

f formal glatt gibt im äußeren Diagramm $s : \operatorname{Spec} R \longrightarrow X$

mit $f \circ s = g \circ h$, $s \circ \iota = g' \circ t$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{t}"] \arrow[d, "\iota"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, "s'"] \arrow[urr, "s"] & S' \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Wegen der ersten Bedingung induzieren s und h ein $s' : \operatorname{Spec} R \to X'$ mit $g' \circ s' = s$, $f' \circ s' = h$

Zeige noch $s' \circ \iota = \bar{t}$:

$$g' \circ s' \circ \iota = s \circ \iota = g' \circ \bar{t} \qquad f' \circ s' \circ \iota = h \circ \iota = f' \circ \bar{t}$$

Nach UE des Faserproduktes X' ist dann auch $s' \circ \iota = \bar{t}$.

Also f' formal glatt.

Jetzt f formal unverzweigt.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{t}"] \arrow[d, "\iota"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[ur, shift right, "s'"'] & S' \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Seien $s, s' : \operatorname{Spec} R \to X'$ zwei Lifts

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "g' \circ \bar{t}"] \arrow[d, "\iota"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "g \circ h"'] \arrow[ur, shift left, "g' \circ s"] \arrow[ur, shift right, "g' \circ s'"'] & S
\end{tikzcd}$$

f formal unverzweigt

$\Rightarrow g' \circ s = g' \circ s'$

Außerdem $f' \circ s = h = f' \circ s'$

Nach UE des Faserproduktes X' ist $s = s'$.

Also f' formal unverzweigt.

formal étale = formal glatt + formal unverzweigt.

② (a) $I \subseteq R$ nilpotent.

Seien $s, s' : \operatorname{Spec} R \to Z$ zwei Lifts im Diagramm rechts

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[ur, shift right, "s'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "f\circ p"'] \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[ur, shift right, "s'"'] & X
\end{tikzcd}$$

h formal unverzweigt

$\Rightarrow s = s'$

Also g formal unverzweigt

(b) $I \subseteq R$ nilpotent.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "f\circ p"'] \arrow[ur, "s"] & X
\end{tikzcd}$$

h formal glatt, also gibt's $s : \operatorname{Spec} R \to Z$ mit $s \circ \iota = \bar{p}$, $h \circ s = f \circ p$

Zeige noch $g \circ s = p$.

Das Diagramm rechts kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "g\circ\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "f\circ p"'] \arrow[ur, shift left, "g\circ s"] \arrow[ur, shift right, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

f formal unverzweigt

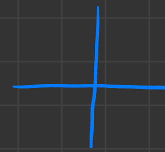
$\Rightarrow p = g \circ s$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R/I \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\iota"'] & Z \arrow[d, "g"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

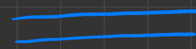
Also g formal glatt.

Aufgabe 2

① $\operatorname{Spec} A = V(T_1T_2) = V(T_1) \cup V(T_2)$ in $\mathbb{A}^2$:



$\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} k[T_1] \sqcup \operatorname{Spec} k[T_2] = \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^1$:



Auf der Komponente $\operatorname{Spec} k[T_1] \subseteq \operatorname{Spec} B$ ist f^* gegeben durch

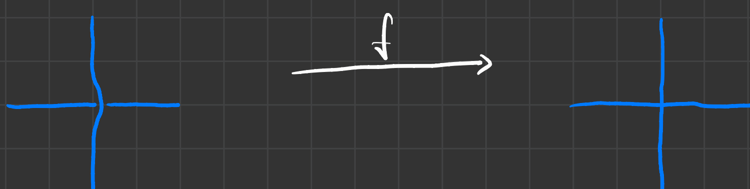
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f^\#} & B & \xrightarrow{\pi_1} & k[T_1] \\ T_1 & \longmapsto & (T_1, 0) & \longmapsto & T_1 \\ T_2 & \longmapsto & (0, T_2) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & k[T_1] = A/(T_2) \\ \bar{f} & \longmapsto & f(T_1, 0) \end{array}$$

Also ist f auf $\operatorname{Spec} k[T_1]$ die Inklusion der affinen Geraden als $V(T_2)$ (also als die horizontale Gerade). Analog ist f auf $\operatorname{Spec} k[T_2]$ die Inklusion von $\mathbb{A}^1$ als $V(T_1)$. Als Bild:

$\operatorname{Spec} B$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{Spec} A$



Kurz: f verklebt zwei Geraden an einem Punkt.

②
$$\begin{tikzcd} R/I & B \arrow[l, "\bar\varphi"'] \arrow[dl, "s"', shift right] \arrow[dl, "s'", shift left] \\ R \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "f^\#"'] \end{tikzcd}$$
mit $I \subseteq R$ nilpotent, s, s' zwei Lifts.

Auf $f^\#(A)$ stimmen s, s' überein wegen $s(f^\#(x)) = \varphi(x) = s'(f^\#(x))$.

Insbesondere ist $s(x) = s'(x)$ für $x = f^\#(T_1^n) = (T_1^n, 0)$ und

$x = f^\#(T_2^n) = (0, T_2^n)$, $n \geq 1$. Außerdem noch für $x = f^\#(a) = (a,a)$, $a \in K$.

Zeige noch $s(x) = s'(x)$ für $x = (1,0)$, dann ist man fertig, denn ein

Element aus B hat die Form

$$\left(\sum_{i\geq 0} a_i T_1^i, \sum_{i\geq 0} b_i T_2^i\right) = (a_0, b_0) + \sum_{i>0} (a_i T_1^i, 0) + \sum_{i>0} (b_i T_2^i, 0)$$

$$= (a_0 - b_0, a_0 - b_0) \cdot (1,0) + (b_0, b_0) + \sum_{i>0} (a_i, a_i) \cdot (T_1^i, 0) + \sum_{i>0} (b_i, b_i)(T_2^i, 0)$$

Sei $e = s(1,0)$ und $e' = s'(1,0) \in R$. Wegen $\pi \circ s = \bar\varphi = \pi \circ s'$ ist

$e - e' \in I$. Als Bilder von Idempotenten sind e und e' idempotent.

$$(e-e')^3 = e^3 - 3e^2e' + 3ee'^2 - e'^3 = e - 3ee' + 3ee' - e' = e - e'$$

$$\Rightarrow \quad e - e' \underset{\text{für } K \text{ ungerade}}{=} (e-e')^K \in I^K \overset{\text{für } K \gg 0}{=} 0$$

siehe auch Stacks, 00J9

$$\Rightarrow e = e'$$

Also $s = s'$ und damit f formal unverzweigt.

(3)

$$\begin{tikzcd}
K & B \arrow[l, "\bar{\varphi}"'] \arrow[dl, dashed, "s?"'] \\
K[\varepsilon] \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "f^{\#}"']
\end{tikzcd}$$

$\pi: \varepsilon \longmapsto 0$

$\varphi: T_1, T_2 \longmapsto \varepsilon$

$f^{\#}: T_1 \longmapsto (T_1, 0)$
$\quad\;\; T_2 \longmapsto (0, T_2)$

$\bar{\varphi}: (p, q) \longmapsto p(0)$

Das kommutiert, denn alle Abbildungen sind K-linear und es gilt:

$$\bar{\varphi}(f^{\#}(T_1)) = \bar{\varphi}(T_1, 0) = 0 = \pi(\varepsilon) = \varphi(\pi(T_1))$$

$$\bar{\varphi}(f^{\#}(T_2)) = \bar{\varphi}(0, T_2) = 0 = \pi(\varepsilon) = \varphi(\pi(T_2))$$

Angenommen, es gibt einen Lift $s: K[\varepsilon] \longrightarrow B$.

Sei $e = s(1,0) \in K[\varepsilon]$ und $1-e = s((1,1)-(1,0)) = s(0,1)$. Beide sind idempotent in $K[\varepsilon]$.

$$(T_1, 0) = (1,0)\cdot(T_1, 0) \implies \varepsilon = s(T_1, 0) = s(1,0)\cdot s(T_1, 0) = e\varepsilon$$

$$(0, T_2) = (0,1)\cdot(0, T_2) \implies \varepsilon = s(0, T_2) = s(0,1)\cdot s(0, T_2) = (1-e)\varepsilon$$

Für $e = a + b\varepsilon$ gilt also:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = (a+b\varepsilon)\varepsilon = a\varepsilon \implies a = 1 \\ \varepsilon = (1-a-b\varepsilon)\varepsilon = (1-a)\varepsilon \implies a = 0 \end{array}\right\} ↯$$

Aufgabe 3

①
$$\begin{tikzcd} R/I & S^{-1}A \arrow[l, "\bar\varphi"'] \arrow[dl, dashed, "s!"'] \\ R \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

$I \subseteq R$ nilpotent, OBdA $I^2 = 0$.

Zeige $r = \varphi(t) \in R^\times$ für alle $t \in S$.

$\pi(r) = \bar\varphi\left(\frac{t}{1}\right)$ ist eine Einheit von R/I.

$\in (S^{-1}A)^\times$

Also gibt es $b \in R$ mit $(a+I)(b+I) = 1 + I \Rightarrow 1 - ab \in I$

$\Rightarrow 1 - 2ab + a^2b^2 = (1-ab)^2 \in I^2 = 0 \Rightarrow 1 = a(2b - ab^2)$, also $a \in R^\times$.

Nach UE der Lokalisierung gibt es ein eindeutiges $s : S^{-1}A \to R$ mit $s \circ i = \varphi$. Zeige noch $\pi \circ s = \bar\varphi$.

$\pi \circ s \circ i = \pi \circ \varphi = \bar\varphi \circ i$. Nach Eindeutigkeit in der UE der Lokalisierung ist $\pi \circ s = \bar\varphi$.

② Notation: $f_n : B_{n-1} \longrightarrow B_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $B_{-1} := A$.

$F_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_0 : A \longrightarrow B_n$, $F : A \to B = \varinjlim B_n$ der induzierte Morphismus.

$i : B_n \to B$ die natürlichen Morphismen

$$\begin{tikzcd} R/I & B \arrow[l, "\bar\varphi"'] \\ R \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi_{-1}"] \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Seien alle f_n formal glatt.

Konstruiere rekursiv kompatible Morphismen $\varphi_n : B_n \longrightarrow R$

Für $n = -1$ ist φ_{-1} schon gegeben.

Für $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} R/I & B_n \arrow[l, "\bar{\varphi} \circ i_n"'] \arrow[dl, "\varphi_n"'] \\ R \arrow[u, "\pi"] & B_{n-1} \arrow[l, "\varphi_{n-1}"] \arrow[u, "f_n"'] \end{tikzcd}$$

f formal glatt $\Rightarrow \exists\, \varphi_n : B_n \to R$,

$\varphi_n \circ f_n = \varphi_{n-1}$, $\pi \circ \varphi_n = \bar{\varphi} \circ i_n$

Diese φ_n sind nach Konstruktion ein kompatibles System und induzieren $\varphi : B \to R$ mit $\varphi \circ i_n = \varphi_n$. Insbesondere ist $\varphi_{-1} = \varphi \circ i_{-1} = \varphi \circ F$.

$$\begin{tikzcd} R/I & B \arrow[l, "\bar{\varphi}"'] \arrow[dl, "\varphi"'] \\ R \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi_{-1}"] \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Zeige noch $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi}$.

$\pi \circ \varphi \circ i_n = \pi \circ \varphi_n = \bar{\varphi} \circ i_n \quad \forall n$

Nach UE von $\lim$ ist $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi}$. Also F formal glatt.

$$\begin{tikzcd} R/I & B \arrow[l, "\bar{\varphi}"'] \arrow[dl, shift right, "\varphi"'] \arrow[dl, shift left, "\varphi'"] \\ R \arrow[u, "\pi"] & A \arrow[l, "\varphi_{-1} = \varphi'_{-1}"] \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Jetzt alle f_i formal unverzweigt.

Seien $\varphi = \varphi'$ zwei Lifts von $\varphi_{-1} = \varphi'_{-1}$.

Sei $\varphi_n := \varphi \circ i_n$ und $\varphi'_n := \varphi' \circ i_n$. Wegen $F = i_{-1}$ geht das auch für $n = -1$ gut. Zeige induktiv $\varphi_n = \varphi'_n$ für alle n. Für $n = -1$ gilt das schon. Für $n \geq 0$:

$$\begin{tikzcd} R/I & B_n \arrow[l, "\bar{\varphi} \circ i_n"'] \arrow[dl, shift right, "\varphi_n"'] \arrow[dl, shift left, "\varphi'_n"] \\ R \arrow[u, "\pi"] & B_{n-1} \arrow[l, "\varphi_{n-1} = \varphi'_{n-1}"] \arrow[u, "f_n"'] \end{tikzcd}$$

f_n formal unverzweigt
$\Rightarrow \varphi_n = \varphi'_n$

Also $\varphi \circ i_n = \varphi' \circ i_n$ für alle n. Nach UE von $\varprojlim$ ist dann auch $\varphi = \varphi'$. Also F formal unverzweigt.

formal étale = formal glatt + formal unverzweigt.

③ <u>Version 1:</u> Spaltung der zweiten Differentialsequenz

Wähle einen surjektiven Morphismus $A[T_i : i \in I] = A[\underline{I}] \longrightarrow B$ für ein hinreichend große Indexmenge I. Sei $J \leq A[\underline{I}]$ der Kern.

Nach Vorlesung ist die zweite Differentialsequenz

$$0 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega_{A[\underline{I}]/A} \otimes_{A[\underline{I}]} B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

exakt und spaltet, da $A \to B$ ja formal glatt ist. Also ist $\Omega_{B/A}$ direkter Summand von $\Omega_{A[\underline{I}]/A} \otimes_{A[\underline{I}]} B \cong A[\underline{I}]^{\oplus I} \otimes_{A[\underline{I}]} B \cong B^{\oplus I}$, also projektiv.

<u>Version 2:</u> Quadrat-Null-Erweiterungen

Zeige, dass $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, -)$ Surjektivität erhält. Sei $M \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} N$ surjektiver Morphismus von B-Moduln.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathrm{Der}_A(B, M) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\alpha_*"] & D \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) & \mathrm{Der}_A(B, N) \arrow[l, "\sim"'] & \alpha \circ D
\end{tikzcd}$$

Zeige also, dass $\mathrm{Der}_A(B,M) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Der}_A(B,N)$ surjektiv ist. Sei $D \in \mathrm{Der}_A(B,N)$.

Mache $B \oplus M$ zu einem Ring mit der Multiplikation

$$(b,m)\cdot(b',m') = (bb', bm' + b'm)$$

Dann ist $B \oplus M$ eine B-Algebra und $M = 0 \oplus M$ ist ein Ideal in $B \oplus M$ mit $M^2 = 0$. Analog $B \oplus N$. Sei $f : A \to B$ der gegebene Morphismus.

$$\begin{tikzcd}
B \oplus N & B \arrow[l, "\tilde{D}"'] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\
B \oplus M \arrow[u, "1 \oplus \alpha"] & A \arrow[l, "{(f,0)}"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

D gibt nun einen Ringhomomorphismus $\tilde{D} : B \to B \oplus N$, $b \longmapsto (b, Db)$. Die Derivationsaxiome stellen sicher, dass das wirklich ein Ringhomomorphismus ist.

Das Diagramm kommutiert:

$$(\tilde{D} \circ f)(a) = (f(a), D f(a)) \underset{\substack{D \text{ ist Derivation} \\ \text{über } A}}{=} (f(a), 0) = \big((1 \oplus \alpha) \circ (f,0)\big)(a)$$

α ist surjektiv, also auch $1 \oplus \alpha$. Der Kern ist in M enthalten, also nilpotent. f ist formal glatt, also gibt es $s : B \to B \oplus M$ mit

$$s \circ f = (f, 0), \quad (1 \oplus \alpha) \circ s = \tilde{D}.$$

Für $b \in B$ schreibe $s(b) = (s_0(b), D'b)$

$$\Rightarrow (b, Db) = \tilde{D}(b) = (1 \oplus \alpha)(s(b)) = (s_0(b), \alpha(D'b))$$

Also ist $s_0 : B \to B$ die Identität und $D' : B \to M$ erfüllt $\alpha \circ D' = D$.

Zeige noch $D' \in \mathrm{Der}_A(B,M)$, dann ist D' ein Urbild von $\alpha_* D' = \alpha \circ D' = D$.

additiv: klar.

Derivation: $b, b' \in B$

$$(bb', D'(bb')) = s(bb') = s(b)\, s(b') = (b, D'b) \cdot (b', D'b') = (bb', bD'b' + b'D'b)$$

$$\Rightarrow D'(bb') = bD'b' + b'Db$$

A-linear: $(f(a), D'f(a)) = s(f(a)) = (f, 0)(a) = (f(a), 0)$

$$\Rightarrow D' f(a) = 0$$

Also $D' \in \mathrm{Der}_A(B, M)$.

Aufgabe 4 $\quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} C$

① $$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\Delta} A \oplus J \xrightarrow{m} B \longrightarrow 0$$

$$a \longmapsto (a, f(a))$$

$$(a, b) \longmapsto f(a) - b$$

$m \circ \Delta = 0$: $m \circ \Delta(a) = m(a, f(a)) = f(a) - f(a) = 0$

$\ker m = \operatorname{im} \Delta$ Sei $m(a,b) = 0$ mit $a \in A$, $b \in J$.

$\Rightarrow 0 = m(a,b) = f(a) - b \Rightarrow f(a) = b$

$\Rightarrow (\pi \circ f)(a) = \pi(b) \overset{b \in J}{=} 0 \quad \Rightarrow a \in \ker(\pi \circ f) = I$

Also $(a,b) = (a, f(a)) = \Delta(a)$

Δ inj Klar, da $I \longrightarrow A$ schon injektiv ist

m surj Sei $b \in B$. $\pi \circ f: A \to C$ ist surjektiv. Wähle ein $a \in A$ mit

$(\pi \circ f)(a) = \pi(b) \Rightarrow \pi(f(a) - b) = 0$, also $f(a) - b \in J$.

$b = f(a) - (f(a) - b) = m(a, f(a) - b)$

② $$I/I^2 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \Omega_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow 0$$

$$a + I^2 \longmapsto f(a) + J^2$$

$$b + J^2 \longmapsto db \otimes 1$$

Teste Exaktheit nach Anwendung von $\operatorname{Hom}_C(-, M)$ für einen beliebigen C-Modul M.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(\Omega_{B/A} \otimes_B C, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(J/J^2, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(I/I^2, M) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Hom}_C(J \otimes_B C, M) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Hom}_C(I \otimes_A C, M) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(B,M) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Hom}_B(J,M) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathrm{Hom}_A(I,M) \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90]
\end{tikzcd}
$$

$$D \longmapsto D|_J \qquad\qquad \alpha \longmapsto \alpha \circ f$$

<u>$\Psi \circ \Phi = 0$</u>: $(\Psi\circ\Phi)(\underset{\in \mathrm{Der}_A(B,M)}{D})(\overset{\in I}{a}) = \Psi(D|_J)(a) = (D|_J \circ f)(a) = D(f(a)) \underset{f\text{ A-lin. Der.}}{=} 0$

<u>$\ker \Psi = \mathrm{im}\, \Phi$</u>: Sei $\Psi(\alpha) = 0$, also $\alpha \circ f = 0$, für ein $\alpha : J \to M$.

Definiere eine A-lineare Abbildung $D_0 : A \oplus J \longrightarrow M$

$$(a, b) \longmapsto -\alpha(b)$$

Auf dem Bild von Δ ist das trivial:

$$D_0(\Delta(a)) = D_0(a, f(a)) = -\alpha(f(a)) = 0$$

Nach ① gibt das einen A-linearen Morphismus $D : B \longrightarrow M$ mit $D \circ m = D_0$. Für $a \in A$, $b \in J$ heißt das:

$$-\alpha(b) = D_0(a,b) = D(m(a,b)) = D(f(a) - b) = Df(a) - Db$$

also $D \circ f = 0$, $D|_J = \alpha$.

Zeige noch, dass D eine Derivation ist. Dann ist $D \in \mathrm{Der}_A(B,M)$ und $\Phi(D) = \alpha$.

Seien $x, x' \in B$. Nach ① ist $x = m(a,b)$, $x' = m(a',b')$ für gewisse $a, a' \in A$, $b, b' \in J$.

$$D(xx') = D\big((f(a)-b)(f(a')-b')\big) = D\big(f(aa') - \underbrace{f(a)b' - f(a')b + bb'}_{\in J}\big)$$

$$= (D \circ f)(aa') - \alpha(a \cdot b' + a' \cdot b - bb')$$

$$= 0 - a\,\alpha(b') - a'\,\alpha(b) + \underbrace{b}_{\in J} \cdot \underbrace{\alpha(b')}_{\in M,\ \text{ein } C = B/J\text{-Modul}}$$

$$= -a\,\alpha(b') - a'\alpha(b)$$

$$xDx' + x'Dx = (f(a)-b)D(f(a')-b') + (f(a')-b')D(f(a)-b)$$

$$= -\underbrace{(f(a)-b)}_{\in J}\underbrace{\alpha(b')}_{\in M} - \underbrace{(f(a')-b')}_{\in J}\underbrace{\alpha(b)}_{\in M}$$

$$= -a \cdot \alpha(b') - a' \cdot \alpha(b) \quad = D(xx')$$

<u>Φ inj:</u> $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ mit $D|_J = 0$. D ist A-linear, also $D|_{f(A)} = 0$. Nach ① ist $B = \operatorname{im} m = J + f(A)$, also $D = 0$.

③
$$\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, dashed, "s_0"'] \\ A/I^2 \arrow[u, "g"] & A \arrow[l, "p"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Die linke Abbildung ist surjektiv wegen $C = A/I$ surjektiv. Der Kern ist I/I^2, also nilpotent.

$f: A \to B$ ist formal glatt, also gibt es einen Lift $s_0 : B \to A/I^2$.

Für $b \in J$ ist $0 = \pi(b) = g(s_0(b))$, also $s_0(b) \in \ker g = I/I^2$.

Insbesondere ist für $b \in J^2$ $s_0(b) \in (I/I^2)^2 = 0$. Damit liefert s_0 eine A-lineare Abbildung $s: J/J^2 \to I/I^2$. Wenn das ein Schnitt von $I/I^2 \xrightarrow{\bar{f}} J/J^2$ ist, sind wir fertig.

$(s \circ \bar{f})(a + I^2) = s(f(a) + J^2) = s_0(f(a)) = p(a) = a + I^2$ ✓