

Blatt 5

Aufgabe 1 Beweis der Kovarianten Form:

Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ ein (kovarianter) Funktor. Zeige, dass

$$\gamma: \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Sets})}(h_X, F) \longrightarrow F(X) \quad \text{bijektiv ist.}$$
$$\eta \longmapsto \eta_X(\text{id}_X)$$

Es ist wirklich $\gamma(\eta) \in F(X)$:

η ist eine natürliche Transformation $h_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \xrightarrow{\cdot} F$,
also eine Familie von Abbildungen $\eta_Y: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow F(Y)$
mit Verträglichkeitsbedingungen.

$$\leadsto \eta_X: \text{End}_{\mathcal{C}} X \longrightarrow F(X) \quad \leadsto \eta_X \in F(X).$$

Injektivität: Seien $\eta, \theta: h_X \xrightarrow{\cdot} F$ natürliche Transformationen
mit $\gamma(\eta) = \gamma(\theta)$. Sei $Y \in \mathcal{C}$ und $f: X \rightarrow Y$. Wegen

Natürlichkeit kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) = h_X(X) & \xrightarrow{\eta_X} & F(X) \\ f_* \downarrow & \supset & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = h_X(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & F(Y) \end{array}$$

$\hookrightarrow$

und analog für d .

$$\begin{aligned}\Rightarrow \eta_Y(f) &= \eta_Y(f \circ \text{id}_X) = (\eta_Y \circ f_*)(\text{id}_X) = (F(f) \circ \eta_X)(\text{id}_X) \\ &= F(f)(\eta_X(\text{id}_X)) = F(f)(\eta_X(d)) = _ = d_Y(f)\end{aligned}$$

Also $\eta_Y = d_Y$. Das gilt für alle $Y \in \mathcal{C}$, also $\eta = d$.

Surjektivität: Sei $\alpha \in F(X)$. Inspiriert von oben definieren

$$\begin{aligned}\text{für } Y \in \mathcal{C} \text{ eine Abbildung } \eta_Y: h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\longrightarrow F(Y) \\ f &\longmapsto F(f)(\alpha)\end{aligned}$$

Zeige, dass diese eine natürliche Transformation $\eta: h_X \rightarrow F$

bilden. Sei $g: Y \rightarrow Z$ ein Morphismus. Es soll

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = h_X(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & F(Y) \\ g_* \downarrow & & \downarrow F(g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = h_X(Z) & \xrightarrow{\eta_Z} & F(Z) \end{array}$$

Kommutieren.

$$\begin{aligned}(F(g) \circ \eta_Y)(f) &= F(g)(F(f)(\alpha)) = F(g \circ f)(\alpha) = \eta_Z(g \circ f) \\ &= (\eta_Z \circ g_*)(f).\end{aligned}$$

Also ist $\eta = (\eta_Y)_{Y \in \mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Sets})}(h_X, F)$ mit

$$Y(\eta) = \eta_X(\text{id}_X) = F(\text{id}_X)(\alpha) = \text{id}_{F(X)}(\alpha) = \alpha.$$

Für die andere Form sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ kontravariant.

Das gibt $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets}$ kovariant.

$$\text{Hom}_{\substack{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}) \\ \text{Kontravar}}}(\mathcal{C}^X, F) = \text{Hom}_{\substack{\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}) \\ \text{Kontravar}}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets})$$

$$= \text{Hom}_{\substack{\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Sets}) \\ \text{Kovar}}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, -), F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Sets})$$

$$= \text{Hom}_{\substack{\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Sets}) \\ \text{Kovar}}}(\mathcal{C}_X, F) \cong F(X)$$

Aufgabe 2

① Sei $f: X \rightarrow Y$ injektiv. Seien $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ Abbildungen mit $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Für $z \in Z$ ist dann $f(g_1(z)) = f(g_2(z)) \Rightarrow g_1(z) = g_2(z)$, da f injektiv. Also $g_1 = g_2$ und damit ist $f_*: \text{Hom}_{\text{Sets}}(Z, X) = h_Z(X) \rightarrow h_Z(Y) = \text{Hom}_{\text{Sets}}(Z, Y)$ injektiv $\leadsto f$ Monomorphismus.

Sei jetzt f ein Monomorphismus. Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Für die beiden Abbildungen $g: \{*\} \rightarrow X, * \mapsto x$ und $g': \{*\} \rightarrow X, * \mapsto x'$ gilt dann $f_*(g) = f \circ g = f \circ g' = f_*(g')$. Weil f ein Monomorphismus ist, ist $g = g'$, also $x = g(*) = g'(*) = x'$. $\leadsto f$ injektiv.

Sei $f: X \rightarrow Y$ surjektiv. Seien $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ mit $f^* g_1 = f^* g_2$, also $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

Für $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. $\leadsto g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$. Also $g_1 = g_2$.

Damit ist $f^*: \text{Hom}_{\text{Sets}}(Y, Z) = h^Z(Y) \rightarrow h^Z(X) = \text{Hom}_{\text{Sets}}(X, Z)$ injektiv. $\leadsto f$ Epimorphismus.

Sei jetzt f ein Epimorphismus. Definiere zwei Abbildungen $g_1, g_2: Y \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$g_1(y) = 1 \ \forall y \in Y, \quad g_2(y) = \begin{cases} 1 & y \in f(X) \\ 0 & y \notin f(X) \end{cases}$. Dann ist $f^* g_1 = g_1 \circ f = g_2 \circ f = f^* g_2$; also $g_1 = g_2$, da f

Epimorphismus ist. Also $f(X) = g_2^{-1}(1) = g_1^{-1}(1) = Y$ und f ist surjektiv.

② Sei $f: A \rightarrow B$ ein injektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen. Ist $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ für zwei

Homomorphismen $g_1, g_2: C \rightarrow A$, so gilt das auch als Gleichheit von Mengenabbildungen. Nach ① ist

$g_1 = g_2$ in Sets, also auch in Ab. Damit ist f ein Monomorphismus. Analog: surjektiv $\Rightarrow$ Epi.

Sei $f: A \rightarrow B$ ein Monomorphismus von abelschen Gruppen. Sei $i: \ker f \rightarrow A$ die Inklusion des Kerns. Dann ist $f \circ i = 0 = f \circ 0_{\ker f \rightarrow A}$. f ist Monomorphismus, also folgt $i = 0$ und damit $\ker f = 0$.

Sei $f: A \rightarrow B$ ein Epimorphismus von abelschen Gruppen. Sei $\pi: B \rightarrow \operatorname{coker} f$ die Projektion auf den Kokern. Dann ist $\pi \circ f = 0 = 0 \circ f$, also $\pi = 0$ wegen Epimorphismus. Da π surjektiv ist, muss $\operatorname{coker} f = 0$ gelten, also f surjektiv.

③ Injektiv $\Rightarrow$ Monomorphismus und surjektiv $\Rightarrow$ Epimorphismus wie in ②.

Sei $f: R \rightarrow A$ ein Monomorphismus von Ringen. Sei $\mathbb{Z}[X] = \mathbb{Z}[X_r: r \in \ker f]$ ein Polynomring mit einer Variable für jedes Element im Kern. Definiere zwei Ringhomomorphismen $g_1, g_2: \mathbb{Z}[X] \rightarrow R$ durch $g_1: X_r \mapsto r$ und $g_2: X_r \mapsto 0$. Diese Homomorphismen existieren und sind eindeutig nach universeller Eigenschaft der Polynomialalgebra. Wegen $(f \circ g_1)(X_r) = f(r) = 0 = f(0) = (f \circ g_2)(X_r) \quad \forall r \in \ker f$ ist $f \circ g_1 = f \circ g_2$. f ist Monomorphismus, also ist $g_1 = g_2$. Für jedes $r \in \ker f$ gilt damit $r = g_1(X_r) = g_2(X_r) = 0$, also $\ker f = 0$ und f injektiv.

Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ multiplikativ und $i: R \rightarrow S^{-1}R$ der Lokalisierungshomomorphismus. Nach universeller Eigenschaft der Lokalisierung gibt es für Ringe A eine bijektive Abbildung $i^*: \operatorname{Hom}(S^{-1}R, A) \xrightarrow{\sim} \{f: R \rightarrow A, f(S) \subseteq A^\times\} \subseteq \operatorname{Hom}(R, A)$. Insbesondere ist

$i^*: \text{Hom}(S^* \mathbb{R}, A) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}, A)$ injektiv für alle A . Also: Epimorphismus.

④ injektiv $\Leftrightarrow$ Monomorphismus und surjektiv $\Rightarrow$ Epimorphismus wie in ②.

Sei $f: G' \rightarrow G$ ein Gruppenepimorphismus und $H = \ker f$. Definiere $X := (G/H) \cup \{*\}$.
 G operiert auf X durch $g(g'H) = (gg')H$ und $g* = *$. Das gibt einen Gruppenhomomorphismus

$\varphi: G \rightarrow \text{Sym} X$. In $\text{Sym} X$ gibt es außerdem die Transposition $\tau: * \mapsto eH, eH \mapsto *, gH \mapsto gH$
 für $g \notin H$. Durch Konjugation mit τ erhält $\text{Sym} X$ einen Automorphismus $\alpha: \sigma \mapsto \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma \tau$.

Für $h \in H$ ist $\varphi(h), (\alpha \circ \varphi)(h) \in \text{Sym} X$ mit:

$$\varphi(h)(*) = h \cdot * = *$$

$$(\alpha \circ \varphi)(h)(*) = (\tau \circ \varphi(h) \circ \tau)(*) = (\tau \circ \varphi(h))(eH) = \tau(eH) = *$$

$$\varphi(h)(eH) = h \cdot H = eH$$

$$(\alpha \circ \varphi)(h)(eH) = (\tau \circ \varphi(h) \circ \tau)(eH) = (\tau \circ \varphi(h))(*) = \tau(*) = eH$$

$$\varphi(h)(gH) = h \cdot gH = hgH, \quad g \notin H$$

$$(\alpha \circ \varphi)(h)(gH) = (\tau \circ \varphi(h) \circ \tau)(gH) = (\tau \circ \varphi(h))(gH) = \tau(hgH) = hgH, \quad g \notin H$$

Also ist $\varphi|_H = \alpha \circ \varphi|_H$ und damit $\varphi \circ f = \varphi|_H \circ f = \alpha \circ \varphi|_H \circ f = \alpha \circ \varphi \circ f$. Weil f ein Epimorphismus ist, ist

$\varphi = \alpha \circ \varphi$, also $\varphi(g) = (\alpha \circ \varphi)(g) = \tau \circ \varphi(g) \circ \tau$ für alle $g \in G$. Vor allem gilt:

$$gH = g \cdot eH = \varphi(g)(eH) = (\tau \circ \varphi(g) \circ \tau)(eH) = (\tau \circ \varphi(g))(*) = \tau(g*) = \tau(*) = eH \Rightarrow g \in H.$$

Damit liegt jedes Element $g \in G$ in $H = \ker f$, also f surjektiv.

Aufgabe 3

① U ist étale, also lokal von endlichem Typ. Nach Kürzungsregel ist auch f lokal von endlichem Typ.

U und V sind étale, also auch formal étale. Nach Blatt 4, Aufgabe 1.2 ist f formal étale.

Zusammen folgt f étale.

② $(a) \Rightarrow (b)$ nach Definition

$(b) \Rightarrow (c)$ Wegen f unverzweigt ist $\Omega_{X/Y} = 0$. Erste Differentialsequenz:

$$f^* \Omega_{Y/S} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{X/S} \longrightarrow \underbrace{\Omega_{X/Y}}_0 \longrightarrow 0$$

Also ist φ ein surjektiver Morphismus von lokal freien Garben auf X von Rang d . Sei K der Kern. Für $x \in X$ hat man eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{X,x}^d$ -Modulen.

$$0 \longrightarrow K_x \longrightarrow (f^* \Omega_{Y/S})_x \longrightarrow (\Omega_{X/S})_x \longrightarrow 0$$

$\parallel$ $\parallel$
 $\mathcal{O}_{X,x}^d$ $\mathcal{O}_{X,x}^d$

Die Sequenz spaltet, da $\mathcal{O}_{X,x}^d$ frei, also projektiv ist. Also ist K_x direkter Summand von $\mathcal{O}_{X,x}^d$, also projektiv. Da $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist, ist K_x sogar frei. Der Rang ist $d-d=0$, also $K_x = 0$. Da alle Halme verschwinden, ist $K = 0$, also φ ein Isomorphismus.

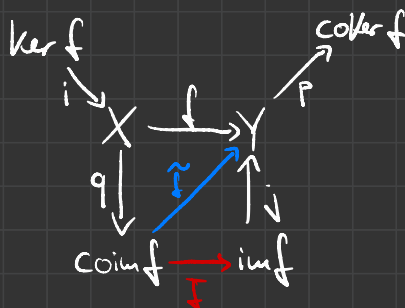
$(c) \Rightarrow (e)$ Aus der ersten Differentialsequenz $f^* \Omega_{Y/S} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{X/Y} \rightarrow 0$ folgt $\Omega_{X/Y} = 0$, also

f (formal) unverzweigt. Die Differentialsequenz spaltet außerdem: Das Inverse von $f^* \Omega_{Y/S} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X/S}$

ist eine Spaltung. Da v glatt, also formal glatt ist, folgt nach Vorlesung, dass f lokal formal glatt ist (der relevante Satz wurde nur für eine offene Situation bewiesen, deshalb nur lokal formal glatt). Damit ist f insgesamt lokal formal étale, also formal étale. Zuletzt ist v lokal von endlichem Typ, also auch f . Damit ist f étale.

Aufgabe 4

①



$\text{coim } f$ ist Kokern von $i: \ker f \rightarrow X$, also gibt es die natürliche Projektion $q: X \rightarrow \text{coim } f$.

Nach Definition des Kerns ist $f \circ i = 0$. Nach universeller Eigenschaft von $\text{coim } f$ faktorisiert

nun f eindeutig durch $X \rightarrow \text{coim } f$. Es gibt also ein eindeutiges $\tilde{f}: \text{coim } f \rightarrow Y$ mit $\tilde{f} \circ q = f$.

$\text{im } f$ ist das Bild von $p: Y \rightarrow \text{coker } f$, also gibt es die natürliche Inklusion $j: \text{im } f \rightarrow Y$.

Nach Definition des Kerns ist $0 = p \circ f = p \circ \tilde{f} \circ q$. Behauptung: Es gilt sogar $0 = p \circ \tilde{f}$.

Es ist $0_{X \rightarrow \text{coker } f} \circ i = 0$, also faktorisiert $0_{X \rightarrow \text{coker } f}$ eindeutig durch $\text{coker } i = \text{coim } f$. Es ist

aber $p \circ \tilde{f} \circ q = 0_{X \rightarrow \text{coker } f} = 0_{\text{coim } f \rightarrow \text{coker } f} \circ q$. Damit folgt $p \circ \tilde{f} = 0_{\text{coim } f \rightarrow \text{coker } f}$.

Nach universeller Eigenschaft von $\text{im } f = \ker p$ faktorisiert $\tilde{f}$ eindeutig durch $j: \text{im } f \rightarrow Y$. Es gibt also

ein eindeutiges $\bar{f}: \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$ mit $j \circ \bar{f} = \tilde{f}$. Insgesamt ist $j \circ \bar{f} \circ q = \tilde{f} \circ q = f$.

② In $R\text{-Mod}$ ist $\text{im } f = \ker(Y \twoheadrightarrow \text{coker } f)$ das klassische Bild und $\text{coim } f = \text{coker}(\ker f \hookrightarrow X) = X/\ker f$.

Seien $q: X \rightarrow X/\ker f$ und $j: \text{im } f \hookrightarrow Y$ wie in ①. Für $x \in X$ gilt dann:

$$f(x) = (j \circ \bar{f} \circ q)(x) = j(\bar{f}(x + \ker f)) = \bar{f}(x + \ker f)$$

Dieses $\bar{f}: X/\ker f \rightarrow \text{im } f$ ist ein Isomorphismus nach erstem Isomorphiesatz.

③ Beh: In $\mathcal{C}$ sind Kerne die üblichen Kerne aus Ab.

Für $f: A \rightarrow B$ in $\mathcal{C}$ ist $\text{Ker } f = \{a \in A: f(a) = 0\}$ torsionsfrei als Untermodul von A . Also

$\text{Ker } f \in \mathcal{C}$. Das erfüllt auch die universelle Eigenschaft eines $\mathcal{C}$ -Kerns: Sei $C \xrightarrow{g} A$ in $\mathcal{C}$ gegeben mit $f \circ g = 0$. Dann faktorisiert g in Ab eindeutig durch $\text{Ker } f \rightarrow A$. Weil $\mathcal{C}$ volle Unterkategorie von Ab ist, ist das auch die eindeutige Faktorisierung in $\mathcal{C}$.

Beh: In $\mathcal{C}$ ist $B/\{b \in B: nb \in \text{im } f \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Kokern von f

Sei $T = \{b \in B: nb \in \text{im } f, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Zeige $B/T \in \mathcal{C}$. Sei $b+T \in B/T$ ein Torsionselement.

$$\Rightarrow 0 = n(b+T) = nb+T, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow nb \in T \Rightarrow \underbrace{nb}_{\neq 0} \in \text{im } f \rightarrow b \in T \Rightarrow b+T = 0. \quad \checkmark$$

Jetzt zeige, dass B/T ein Kokern von f ist. Wegen $\text{im } f \subseteq T$ ist die Komposition $A \xrightarrow{f} B \rightarrow B/T$ Null.

Sei nun $B \xrightarrow{g} C$ in $\mathcal{C}$ gegeben mit $g \circ f = 0$. Wenn $g(T) = 0$, dann faktorisiert g eindeutig durch B/T und wir sind fertig.

Sei $b \in T$, also $nb = f(a)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a \in A$. $n \cdot g(b) = g(nb) = g(f(a)) = 0 \xRightarrow{\text{C torsionsfrei}} g(b) = 0 \quad \checkmark$

$\mathcal{C}$ nicht abelsch: Betrachte $f: \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$. $\text{Ker } f = 0 \Rightarrow \text{coim}_\mathcal{C} f = \text{coker}_\mathcal{C}(0 \rightarrow \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

mit $q: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}$. $\text{coker}_\mathcal{C} f = \mathbb{Z}/\{a \in \mathbb{Z}: \exists \text{ auto: } na \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$

$\Rightarrow \text{im}_\mathcal{C} f = \text{Ker}(\mathbb{Z} \rightarrow 0) = \mathbb{Z}$ mit $j: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \\ q \downarrow & \mathbb{Z} & \uparrow j \\ \text{coim } f & \xrightarrow{\text{id}} & \text{im } f \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \\ \parallel & \mathbb{Z} & \parallel \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Also ist $\bar{f}: \text{coim } f = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} = \text{im } f$ genau wie f die Multiplikation mit 2, also kein Isomorphismus.

④ $R = \mathbb{Z}/p^2$. Beh: $f: R \xrightarrow{p} R$ hat in Kategorie $\mathcal{D}$ der endlich-freien R -Moduln weder Kern noch Kokern

Vorbemerkung: Für $M, N \in \mathcal{D}$, $M \cong R^m$, $N \cong R^n$ ist $\text{Hom}_R(M, N) = \text{Hom}_R(R^m, R^n) \cong \text{Hom}_R(R, R)^{m \times n} \cong R^{m \times n}$ selbst endlich-frei über R .

Angenommen, f hat Kern K . Nach universeller Eigenschaft des Kerns gilt dann

$$\text{Hom}_R(R, K) \cong \text{Ker}_{\text{Ab}}(\text{Hom}_R(R, R) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(R, R)) \cong \text{Ker}_{\text{Ab}}(R \xrightarrow{p} R) = pR \cong \mathbb{Z}/p$$

Das ist nicht endlich frei über R , Widerspruch zur Vorbemerkung!

Angenommen, f hat Kokern C . Nach universeller Eigenschaft des Kokerns gilt dann

$$\text{Hom}_R(C, R) \cong \text{Ker}_{\text{Ab}}(\text{Hom}_R(R, R) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(R, R)) \cong \text{Ker}_{\text{Ab}}(R \xrightarrow{p} R) = pR \cong \mathbb{Z}/p$$

Wieder Widerspruch zur Vorbemerkung!