Blatt 6

Aufgabe 1 $\boxed{\Rightarrow}$ Wende $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I)$ an auf $0 \to I \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X \to 0$. Das gibt exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,I) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,I) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(I,I) \to 0$$

Insbesondere ist i^* surjektiv. Also gibt es ein $s: Y \to I$ mit $id_I = i^*(s) = s \circ i$. $\rightsquigarrow$ s ist Spaltung von

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] & Y \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r, "p"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Linksexakt ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I)$ sowieso. Zeige noch, dass Monos auf Epis gehen, dann hat man Exaktheit.

Sei $i: X \hookrightarrow Y$ ein Monomorphismus. Wir brauchen, dass $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,I) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,I)$ surjektiv ist in Ab.

Sei $f: X \to I$, finde also $\bar{f}: Y \to I$ mit $\bar{f} \circ i = i^* \bar{f} = f$.

Konstruiere einen Pushout $Y \sqcup_X I$ in $\mathcal{A}$. Es ist $X \xrightarrow{(i,-f)} Y \oplus I$ mono ($(i,-f)$ ist der Morphismus mit $\pi_1 \circ (i,-f) = i$, $\pi_2 \circ (i,-f) = -f$), denn: Sei $g: Z \to X$ mit $(i,-f) \circ g = 0$. $\Rightarrow 0 = \pi_1 \circ (i,-f) \circ g = i \circ g \overset{i \text{ mono}}{\Rightarrow} g = 0$.

Mit $Y \sqcup_X I := \mathrm{coker}(i,-f)$ erhält man eine exakte Sequenz $0 \to X \xrightarrow{(i,-f)} Y \oplus I \xrightarrow{p} Y \sqcup_X I \to 0$.

Zeige jetzt, dass die Komposition $I \xrightarrow{(0,id)} Y \oplus I \xrightarrow{p} Y \sqcup_X I$ mono ist. Sei $g: Z \to I$ gegeben mit $p \circ (0,id) \circ g = 0$. Dann faktorisiert $(0,id) \circ g = (0,g)$ durch $\mathrm{Ker}\, p = X$.

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\bar{g}"'] \arrow[ddr, "0"] & & \\ & & I \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "(i,-f)"'] & Y \oplus I \arrow[r, "p"'] & Y \sqcup_X I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es gibt also ein $\bar{g}: Z \to X$ mit $(i,-f) \circ \bar{g} = (0,id) \circ g$.

$\Rightarrow 0 = 0 \circ g = \pi_1 \circ (0,id) \circ g = \pi_1 \circ (i,-f) \circ \bar{g} = i \circ \bar{g} \overset{i \text{ mono}}{\Rightarrow} \bar{g} = 0 \Rightarrow g = \pi_2 \circ (0,id) \circ g = \pi_2 \circ (i,-f) \circ \overset{0}{\bar{g}} = 0$. Also $p \circ (0,id)$ mono.

Jetzt ist $p \circ (0,id)$ Teil einer exakten Sequenz $0 \to I \underset{s}{\overset{p \circ (0,id)}{\rightleftarrows}} Y \sqcup_X I \to \mathrm{Koker} \to 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Spaltung $s: Y \sqcup_X I \to I$. $\rightsquigarrow s \circ p \circ (0,id) = id$.

Nach Definition von p ist $0 = p \circ (i, -f) = p \circ ((i,0) - (0,f))$, also $p \circ (i,0) = p \circ (0,f)$.

Definiere nun $\bar{f} := \left(Y \xrightarrow{(\mathrm{id},0)} Y \oplus I \xrightarrow{p} Y \sqcup_X I \xrightarrow{s} I\right)$. Dann gilt

$$i^*\bar{f} = \bar{f} \circ i = s \circ p \circ (\mathrm{id}, 0) \circ i = s \circ p \circ (i,0) = s \circ p \circ (0,f) = s \circ p \circ (0,\mathrm{id}) \circ f = \mathrm{id} \circ f = f.$$

Aufgabe 2 Nach Freyd-Mitchell ist $\mathcal{A}$ exakte Unterkategorie einer Modulkategorie. $\rightsquigarrow$ Rechne wie in R-Mod.

① cone f ist Komplex:

$$d_C^2(a,b) = d_C(-d_A a, d_B b + f(a)) = \left(d_A^2 a, d_B(d_B b + f(a)) - f(d_A a)\right) = \left(0, d_B^2 b + d_B(f(a)) - f(d_A a)\right) = (0,0).$$

exakte Sequenz

Definiere Morphismen von Komplexen $i: B \to \operatorname{cone} f$, $i^n: b \mapsto (0,b)$ und $p: \operatorname{cone} f \to A[1]$, $p^n: (a,b) \mapsto a$.

Das sind wirklich Morphismen von Komplexen:

$$(d_C \circ i)(b) = d_C(0,b) = (0, d_B b) = (i \circ d_B)(b) \qquad (p \circ d_C)(a,b) = p(-d_A a, d_B b + f(a)) = -d_A a = d_{A[1]}(p(a,b)) = (d_{A[1]} \circ p)(a,b)$$

Exaktheit ist klar.

② $\delta: H^n(A[1]) \to H^{n+1}(B)$ ist folgendermaßen beschrieben:

Eine Klasse aus $H^n(A[1])$ wird von einem $a \in A[1]^n$ repräsentiert. Wähle Urbild in $(\operatorname{cone} f)^n$. Wende d_C an. Wähle Urbild in B^{n+1}. Bilde Kohomologieklasse.

Hier konkret: Sei $[a] \in H^n(A[1]) = H^{n+1}(A)$ mit $a \in Z^{n+1}(A)$. Ein Urbild von a unter p ist $(a,0) \in C^n$. d_C anwenden gibt $(-d_A a, f(a)) = (0, f(a))$. Das Urbild unter ist $f(a) \in B^{n+1}$. Die zugehörige Kohomologieklasse ist $\delta([a]) = [f(a)] = H^{n+1}(f)([a])$.

③ $\boxed{\Longrightarrow}$ Sei f ein Quasiisomorphismus. Lange exakte Sequenz zu ①:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^{n-1}(A[1]) \arrow[r, "\sim", "{H^n(f) \text{ nach ② } \rightsquigarrow \text{ iso}}"'] \arrow[d, equal] & H^n(B) \arrow[r] & H^n(\operatorname{cone} f) \arrow[r] & H^n(A[1]) \arrow[r, "\sim", "{H^{n+1}(f) \text{ nach ② } \rightsquigarrow \text{ iso}}"'] \arrow[d, equal] & H^{n+1}(B) \arrow[r] & \dots \\
& H^n(A) & & & H^{n+1}(A) & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow H^n(\operatorname{cone} f) = 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sei cone f azyklisch. Lange exakte Sequenz zu ①:

$$\ldots \longrightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{H^{n-1}(\operatorname{cone} f)} \longrightarrow \underset{\overset{\|}{H^n(A)}}{H^{n-1}(A[1])} \xrightarrow[\text{nach } \textcircled{2}]{H^n(f)} H^n(B) \longrightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{H^n(\operatorname{cone} f)} \longrightarrow \ldots$$

$\Rightarrow H^n(f)$ Iso.

④ $\boxed{\Leftarrow}$ Sei $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor, der Quasiisomorphismen erhält. Sei $C \in Ch(\mathcal{A})$ exakt.

Dann ist $C \to 0$ ein Quasiisomorphismus, also auch $F(C) \to F(0) = 0$. Dann ist

$H^n(C) \xrightarrow{\sim} H^n(0) = 0$ ein Isomorphismus, also $H^n(C) = 0$ für alle n.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exakt. Sei $A \xrightarrow{f} B$ ein Quasiisomorphismus in $Ch(\mathcal{A})$. Nach ③ ist $\operatorname{cone} f$ exakt,

also auch $F(\operatorname{cone} f) = \operatorname{cone} F(f)$. Nach ③ ist $F(f)$ ein Quasiisomorphismus.

Aufgabe 3

Für $n \geq 0$ setze $J^i = I^i \oplus K^i$. Dann haben wir ein weißes kommutatives Diagramm rechts mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_Y"] \arrow[dl, dashed, "s"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "{(id,0)}"'] \arrow[d] & J^0 \arrow[r, "{\langle 0,id\rangle = \pi_2}"'] & K^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & - & & - &
\end{tikzcd}$$

Konstruiere nun η_Y. f ist ein Monomorphismus und I^0 injektiv, also existiert ein $s: Y \to I^0$ mit $s \circ f = \eta_X$. Definiere $\eta_Y := (s, \eta_Z \circ g): Y \to J^0 = I^0 \oplus K^0$, also als den eindeutigen Morphismus mit $\pi_1 \circ \eta_Y = s$, $\pi_2 \circ \eta_Y = \eta_Z \circ g$. Das Kästchen rechts von η_Y kommutiert damit direkt. Für das linke Kästchen:

$$\pi_1 \circ \eta_Y \circ f = s \circ f = \eta_X = \pi_1 \circ (id, 0) \circ \eta_X \qquad \pi_2 \circ \eta_Y \circ f = \eta_Z \circ \underbrace{g \circ f}_{0} = 0 = \underbrace{\pi_2 \circ (id,0)}_{0} \circ \eta_X$$

$\Rightarrow \eta_Y \circ f = (id, 0) \circ \eta_X$, also kommutiert das Diagramm.

Nach Schlangenlemma ist $0 \to \operatorname{coker} \eta_X \to \operatorname{coker} \eta_Y \to \operatorname{coker} \eta_Z \to 0$ exakt.

$d_I^0: I^0 \to I^1$ induziert einen Monomorphismus $\bar{d}_I^0: \operatorname{coim} d_I^0 \cong \operatorname{im} d_I^0 \hookrightarrow I^1$ mit $\operatorname{coim} d_I^0 = I^0 / \ker d_I^0 = I^0 / \operatorname{im} \eta_X = \operatorname{coker} \eta_X$. Analog gibt's $\bar{d}_K^0: \operatorname{coker} \eta_Z \hookrightarrow K^1$.

Das gibt ein Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} \eta_X \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_I^0"'] & \operatorname{coker} \eta_Y \arrow[r] & \operatorname{coker} \eta_Z \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_K^0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_I^1"'] & J^1 \arrow[r] & K^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_I^1"'] & {} \\
 & - & & - &
\end{tikzcd}$$

Wende darauf die gleiche Konstruktion wie oben auf dieses Diagramm an. Das gibt $\bar{d}_J^0: \operatorname{coker} \eta_Y \to J^1$. Fahre rekursiv so fort, um

$\tilde d_J^n : \operatorname{coker} d_J^{n-1} \to J^{n+1}$ zu erhalten.

Definiere $d_J^n := \left(J^n \twoheadrightarrow \operatorname{coker} d_J^{n-1} \xrightarrow{\tilde d_J^n} J^{n+1}\right)$.

Damit erhält man ein Diagramm rechts.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "{(id,0)}"'] \arrow[d, "d_I^0"] & J^0 \arrow[r, "{\langle 0,id\rangle}"'] \arrow[d, "d_J^0"] & K^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_K^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r, "{(id,0)}"'] \arrow[d] & J^1 \arrow[r, "{\langle 0,id\rangle}"'] \arrow[d] & K^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Das kommutiert: Für die oberen Kästchen wurde das oben gezeigt. Für die anderen Kästchen betrachte das Diagramm links.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^n \arrow[r] \arrow[d] & J^n \arrow[r] \arrow[d] & K^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} d_I^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde d_I^n"] & \operatorname{coker} d_J^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde d_J^n"] & \operatorname{coker} d_K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde d_K^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I^{n+1} \arrow[r] & J^{n+1} \arrow[r] & K^{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die beiden oberen Kästchen kommutieren nach Schlangenlemma, die unteren nach Konstruktion von $\tilde d_J^n$ (siehe Konstruktion von η_Y oben).

$0 \to Y \to J^\bullet$ ist ein Komplex: Am Anfang ist $d_J^0 \circ \eta_Y = \left(\underbrace{Y \xrightarrow{\eta_Y} J^0 \to \operatorname{coker}\eta_Y}_{0} \xrightarrow{\tilde d_J^0} J^1\right) = 0$.

Weiterhinten ist $d_J^{n+1} \circ d_J^n = \left(J^n \to \operatorname{coker} \underbrace{d_J^{n-1} \xrightarrow{\tilde d_J^n} J^{n+1} \to}_{0} \operatorname{coker} d_J^n \xrightarrow{\tilde d_J^{n+1}} J^{n+2}\right) = 0$.

(coker η_Y für $n=0$)

In jeder Situation wie in der Aufgabe sind $0 \to X \to I^\bullet$ und $0 \to Z \to K^\bullet$ exakte Komplexe und $0 \to Y \to J^\bullet$ ist ein Komplex. Außerdem hat man eine kurze exakte Sequenz aus diesen drei Komplexen. Die lange exakte Kohomologiesequenz zeigt nun, dass auch $0 \to Y \to J^\bullet$ exakt ist, also ist $J^\bullet$ eine Auflösung von Y.

Aufgabe 4

① $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist ein Kontravarianter Funktor von Ab nach Ab. Zeige erst, dass Ab_{fin} nach Ab_{fin} geschickt wird. Genauer: Zeige $\#\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \#A$ für A endliche abelsche Gruppe.

Induktion nach $n=\#A$.

Für $n=1$ ist $A=0 \Rightarrow \mathrm{Hom}(0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$.

Für $n>1$ wähle $a\in A\setminus\{0\}$, sei $d:=\mathrm{ord}_A a>1$.

$\leadsto$ Exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/d \xrightarrow{\cdot a} A \longrightarrow A/\langle a\rangle \longrightarrow 0$.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist injektiv in Ab, also ist auch $0\to \mathrm{Hom}(A/\langle a\rangle,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to 0$.

Wegen $\#A/\langle a\rangle = \frac{n}{d} < n$ ist $\#\mathrm{Hom}(A/\langle a\rangle,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \frac{n}{d}$ nach Induktion.

$$\#\underbrace{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}_{f \longmapsto f(1)} = \#\{x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z} : dx=0\} = \#\left(\tfrac{1}{d}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right) = d$$

Also $\#\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \underset{\text{exSeq}}{=} \#\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/d,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cdot\#\mathrm{Hom}(A/\langle a\rangle,\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = d\cdot\frac{n}{d} = n$

Übrigens: Man kann sogar $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong A$ zeigen. Der Isomorphismus ist nicht natürlich in A und der Beweis erfordert den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen.

Also ist $F:=\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ein Funktor $\mathrm{Ab}_{fin}^{op}\to\mathrm{Ab}_{fin}$. Zeige, dass $F^2:\mathrm{Ab}_{fin}\to\mathrm{Ab}_{fin}$ isomorph zu Id ist, dann folgt, dass F eine Äquivalenz ist.

Definiere $ev:\mathrm{Id}_{Ab}\longrightarrow F^2$ durch $ev_A: A\to F^2A=\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $a\longmapsto(\varphi\longmapsto\varphi(a))$.

Rechnen: $ev_A(a)$ ist Gruppenhomomorphismus, ev_A ist Gruppenhomomorphismus.

Natürlichkeit von ev:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "ev_A"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "(\psi^*)^*"] \\
B \arrow[r, "ev_B"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Sei $\psi: A \to B$, $a \in A$. Zeige $(\psi^*)^*(ev_A(a)) = ev_B(\psi(a))$.

Dafür sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

$$\left((\psi^*)^*(ev_A(a))\right)(\varphi) = (ev_A(a) \circ \psi^*)(\varphi) = ev_A(a)(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)(a)$$

$$ev_B(\psi(a))(\varphi) = \varphi(\psi(a)) = (\varphi \circ \psi)(a) \quad ✓$$

Also F natürlich. Schließlich zeige, dass ev ein Isomorphismus ist. Dafür genügt, dass $ev_A: A \to F^2A$ injektiv ist für alle $A \in Ab_{fin}$, denn nach oben ist $\#F^2A = \#FA = \#A$ $(<\infty)$, also ev_A automatisch bijektiv.

Sei $a \in \ker ev_A$. Dann ist für alle $\varphi: A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $\quad \varphi(a) = ev_A(a)(\varphi) = 0(\varphi) = 0$.

Sei $d := \mathrm{ord}_A\, a$. Dann gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}/d \xrightarrow{\alpha} A$, $1 \mapsto a$. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine injektive abelsche Gruppe, also dehnt sich $\mathbb{Z}/d \xrightarrow{\beta_0} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $1 \mapsto \frac{1}{d}$ aus zu einem $\beta: A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\beta \circ \alpha = \beta_0$.

Nach oben ist $\beta(a) = 0$, also $\frac{1}{d} + \mathbb{Z} = \beta_0(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(a) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, also $\frac{1}{d} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow a = 0$.

② Angenommen, es gibt eine Äquivalenz $F: Sets \to Sets^{op}$. In $Sets$ ist $\{*\}$ ein terminales Objekt. Damit ist auch $F(\{*\})$ terminal in $Sets^{op}$: Für jedes $Y = FX$ im Bild von F (und das sind ja bis auf Isomorphie alle) ist $\#\mathrm{Hom}_{Sets^{op}}(Y, F\{*\}) \underset{F \text{ volltreu}}{=} \#\mathrm{Hom}_{Sets}(X,\{*\}) \overset{\{*\} \text{ term.}}{=} 1$. Ein terminales Objekt in $Sets^{op}$ ist initial in $Sets$, also muss $F(\{*\}) = \emptyset$ sein.

Sei nun X eine Menge mit mehr als einem Element. Dann ist X weder initial noch terminal, also ist $X \neq \emptyset$ und $F(X) \neq \emptyset$.

$$\emptyset \neq \mathrm{Hom}_{Sets}(\{*\},X) \underset{F \text{ volltreu}}{\cong} \mathrm{Hom}_{Sets^{op}}(F(\{*\}),FX) = \mathrm{Hom}_{Sets^{op}}(\emptyset,FX) = \mathrm{Hom}_{Sets}(FX,\emptyset) = \emptyset \quad ↯$$

③ Angenommen, $F: Ab \to Ab^{op}$ ist eine Äquivalenz. Weil F volltreu ist, ist

$\mathrm{End}_{Ab^{op}} F(\mathbb{Q}) \cong \mathrm{End}_{Ab} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$. Also ist $F(\mathbb{Q})$ eine abelsche Gruppe mit Endomorphismenring $\mathbb{Q}$.

Auf $F(\mathbb{Q})$ ist Multiplikation mit $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ bijektiv, denn $n \in \mathrm{End}\, F(\mathbb{Q})$ ist eine Einheit. Also ist $F(\mathbb{Q})$ nicht nur eine abelsche Gruppe, sondern sogar ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wäre $\dim_{\mathbb{Q}} F(\mathbb{Q}) > 1$, wäre $\mathbb{Q} \cong \mathrm{End}\, F(\mathbb{Q})$ nicht komutativ. Also $\dim_{\mathbb{Q}} F(\mathbb{Q}) \leq 1$. $F(\mathbb{Q}) = 0$ geht offensichtlich nicht, also muss $F(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ gelten.

$\mathbb{Q}$ ist divisibel, also injektiv in Ab. Damit ist $\mathbb{Q} \cong F(\mathbb{Q})$ injektiv in Ab^{op}, also projektiv in Ab. Also ist $\mathbb{Q}$ eine Untergruppe (sogar direkter Summand) einer freien abelschen Gruppe A. In $\mathbb{Q}$ ist jedes Element durch beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ teilbar. In A gilt das nur für 0. $\lightning$

④ Definiere $F: \mathcal{M}_K \longrightarrow K\text{-Vec}_{fin}$, $(m \xrightarrow{M} n) \longmapsto (K^m \xrightarrow[v \mapsto Mv]{} K^n)$.

F ist Funktor: Klar

F ist essentiell surjektiv: Jeder endlichdimensionale Vektorraum hat eine endliche Basis, ist also isomorph zu einem K^n.

F ist volltreu: Nach linearer Algebra ist eine lineare Abbildung $K^m \to K^n$ Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten Matrix.