# Blatt 7

**Aufgabe 1** $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ exakt mit $\mathcal{F}$ welk. Sei $h \in \mathcal{H}(X)$. Definiere

$M := \{(U,g) : U \subseteq X$ offen, $g \in \mathcal{G}(U)$, $\beta(g) = h|_U\}$. $M$ ist halbgeordnet durch $(U,g) \leq (U',g') :\Leftrightarrow U \subseteq U'$, $g'|_U = g$.

Wegen $(\emptyset, 0) \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Sei $(U_i, g_i)_{i\in I} \subseteq M$ eine Kette. Dann ist $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ offen. Außerdem ist

für $i,j \in I$ oBdA $(U_i, g_i) \leq (U_j, g_j)$, also $g_j|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i} = g_i = g_i|_{U_i \cap U_j}$. Also verkleben sich die $g_i$ eindeutig zu einem

$g \in \mathcal{G}(U)$ mit $g|_{U_i} = g_i$. $\Rightarrow \beta(g)|_{U_i} = \beta(g_i) = h|_{U_i}$ für alle $i \in I$, also $\beta(g) = h|_U$. Das zeigt $(U,g) \in M$ mit

$(U,g) \geq (U_i, g_i)\ \forall i$. Demnach kann das Lemma von Zorn auf $M$ angewandt werden und liefert ein

maximales $(U,g) \in M$. Zeige nun noch $U = X$.

Sei $x \in X$. Weil $\beta$ surjektiv ist, gibt es ein $s \in \mathcal{G}_x$ mit $\beta(s) = h_x$. $s$ wird repräsentiert von $\tilde{g} \in \mathcal{G}(V)$ für

eine Umgebung $V$ von $x$. Wegen $h_x = \beta(\tilde{g}_x) = \beta(\tilde{g})_x$ ist $h = \beta(\tilde{g})$ auf einer Umgebung von $x$. Nach Verkleinerung

von $V$ ist oBdA also $\beta(\tilde{g}) = h|_V$. Damit ist $\beta(g|_{U\cap V} - \tilde{g}|_{U\cap V}) = h|_{U\cap V} - h|_{U\cap V} = 0$.

Wir wissen, dass $\Gamma(U\cap V, -)$ linksexakt ist, also ist $0 \to \mathcal{F}(U\cap V) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U\cap V) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U\cap V)$ exakt. Weil

nach oben $g|_{U\cap V} - \tilde{g}|_{U\cap V}$ hier im Kern von $\beta$ liegt, ist $g|_{U\cap V} - \tilde{g}|_{U\cap V} = \alpha(f)$ für ein $f \in \mathcal{F}(U\cap V)$. Wegen

Welkheit ist $f = \bar{f}|_{U\cap V}$ für ein $\bar{f} \in \mathcal{F}(V)$.

Definiere nun $g' := \tilde{g} + \alpha(\bar{f}) \in \mathcal{G}(V)$. Dann ist $g'|_{U\cap V} = \tilde{g}|_{U\cap V} + \alpha(\bar{f}|_{U\cap V}) = \tilde{g}|_{U\cap V} + \alpha(f) = g|_{U\cap V}$. Also verkleben

sich $g$ und $g'$ zu $\bar{g} \in \mathcal{G}(U \cup V)$.

Beh: $\beta(\bar{g}) = h|_{U\cup V}$, also $(U\cup V, \bar{g}) \in M$.

$\beta(\bar{g})|_U = \beta(\bar{g}|_U) = \beta(g) = h|_U \qquad \beta(\bar{g})|_V = \beta(g') = \beta(\tilde{g}) + \beta(\alpha(g'')) = h|_V + 0$ ✓

Also ist $(U \cup V, \bar{g}) \in M$ mit $(U \cup V, \bar{g}) \geq (U, g)$. Wegen Maximalität von $(U, g)$ ist $(U \cup V, \bar{g}) = (U, g)$, also $x \in V \subseteq U \cup V = U$. Damit liegt jedes $x \in X$ in $U$, also $U = X$.

## Aufgabe 2

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, dashed, "\bar f"'] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "i_Y"'] & Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Vorbemerkung: Der Kern von $(\alpha,\beta): (X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ ist $(\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\bar f} \operatorname{Ker}\beta)$ mit $\bar f$ induziert von $f$. Analog für Kokerne. Vor allem ist $(\alpha,\beta)$ mono $\Leftrightarrow 0=\operatorname{Ker}(\alpha,\beta)=(\operatorname{Ker}\alpha\to\operatorname{Ker}\beta)$ $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\alpha=0 \wedge \operatorname{Ker}\beta \Leftrightarrow \alpha,\beta$ mono und $(\alpha,\beta)$ epi $\Leftrightarrow \alpha,\beta$ epi. Eine Sequenz in $\mathcal{B}$ ist genau dann exakt, wenn sie für Start und für Ziel der Pfeile exakt ist.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, dashed, "\bar\alpha"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

① $F^0=\operatorname{Ker}$ wird auf folgende Weise zu einem Funktor $\mathcal{B}\to\mathcal{A}$: Für Objekte ist $\operatorname{Ker}(X\xrightarrow{f}Y)=\operatorname{Ker} f$. Ein Morphismus $(\alpha,\beta): (X\xrightarrow{f}Y)\to(X'\xrightarrow{f'}Y')$ wird geschickt auf das eindeutige $\bar\alpha$, das das Diagramm rechts kommutativ ergänzt. Analog für $F^1=\operatorname{Coker}$. Eine kurze exakte Sequenz $0\to\left(\begin{smallmatrix}X'\\ \downarrow f'\\ Y'\end{smallmatrix}\right)\longrightarrow\left(\begin{smallmatrix}X\\ \downarrow f\\ Y\end{smallmatrix}\right)\longrightarrow\left(\begin{smallmatrix}X''\\ \downarrow f''\\ Y''\end{smallmatrix}\right)\to 0$ ist genau ein Schlangenlemma-diagramm, also erhält man dafür ein $\delta^0_{f',f,f''}: \operatorname{Ker} f''=F^0 f''\longrightarrow F^1 f' =\operatorname{coker} f'$ und das Schlangenlemma liefert Exaktheit von $0\to F^0f'\to F^0f\to F^0f''\xrightarrow{\delta^0}F^1f'\to F^1f\to F^1f''\to 0$. Die höheren $\delta^n$ setze auf $0$. Dann fehlt für $(F^i,\delta)$ exakter $\delta$-Funktor nur noch Natürlichkeit von $\delta^0$. Ein Morphismus von exakten Sequenzen in $\mathcal{B}$ sieht in $\mathcal{A}$ so aus:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & Z' \arrow[rr, "c"] \arrow[dd, "g'"] & & Z \arrow[rr, "c'"] \arrow[dd, "g"] & & Z'' \arrow[rr] \arrow[dd, "g''"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[rr, "a"] \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[rr, "a'"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dd, "f"'] & & X'' \arrow[rr] \arrow[ur, "\varphi''"] \arrow[dd, "f''"'] & & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & W' \arrow[rr, "d"] & & W \arrow[rr, "d'"] & & W'' \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[rr, "b"'] \arrow[ur, "\psi'"] & & Y \arrow[rr, "b'"'] \arrow[ur, "\psi"] & & Y'' \arrow[rr] \arrow[ur, "\psi''"] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

(alles kommutiert)

Für die vordere Seite (•) sieht $\delta^0$ so aus (nutze Freyd-Mitchell, um mit Elementen rechnen zu können):

Für $x'' \in \ker f''$ wähle $x \in X$ mit $a'(x) = x''$. Wähle $y' \in Y'$ mit $b(y') = f(x)$. Dann ist $y' + \operatorname{im} f' = \delta^0(x'')$.

Analog gehts auf der hinteren Seite (•). Berechne nun $\delta^0(\varphi''(x''))$, wenn $\delta^0(x'')$ wie oben konstruiert wurde.

Wegen $c'(\varphi(x)) = \varphi''(a'(x)) = \varphi''(x'')$ ist $\varphi(x)$ ein Urbild von $\varphi''(x'')$. Wegen $d(\psi'(y')) = \psi(b(y')) = \psi(f(x)) = g(\varphi(x))$ ist $\psi(y')$ ein Urbild von $g(\varphi(x))$. Also ist $\delta^0(\varphi''(x'')) = \psi(y') + \operatorname{im} g'$

$$\delta^0(F^0(\varphi'',\psi'')(x'')) = \delta^0(\varphi''(x'')) = \psi(y') + \operatorname{im} g' = F^1(\varphi,\psi)(y' + \operatorname{im} f') = F^1(\varphi,\psi)(\delta^0(x''))$$

Also ist $\delta^0 \circ F^0(\varphi'',\psi'') = F^1(\varphi,\psi) \circ \delta^0$ und $\delta^0$ ist natürlich.

② Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein kommutatives Quadrat rechts. $Y \xrightarrow{id} Y$ und $X \xrightarrow{(id,f)} X \oplus Y$ sind Monomorphismen in $\mathcal{A}$, also ist $((id,f), id): (X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow (X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y)$ ein Monomorphismus in $\mathcal{B}$. Zeige nun noch $F^n(X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y) = 0$ für $n > 0$. Für $n \geq 2$ gilt das nach Definition von $F^n$. Für $n = 1$ ist $F^1(X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y) = \operatorname{coker}(X \oplus Y \xrightarrow{\pi_2} Y) = 0$. Also $F$ auslöschbar.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(id,f)}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \oplus Y \arrow[d, "\pi_2"] \\ Y \arrow[r, "id"'] & Y \end{tikzcd}$$

③ Konstruiere injektive Objekte in $\mathcal{B}$: Der Funktor $P_0: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $(X \to Y) \mapsto X$ hat ein Rechtsadjungiertes. Für $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathcal{B}$, $Z \in \mathcal{A}$ gilt

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P_0(X \xrightarrow{f} Y), Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) = \left\{\alpha: X \to Z : \begin{tikzcd}[sep=small] X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}\right\} \cong \{(\alpha, 0): (X \xrightarrow{f} Y) \to (Z \to 0)\} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(X \xrightarrow{f} Y, Z \to 0)$$

Der adjungierte Funktor ist also $I_0: Z \mapsto (Z \to 0)$. Nach Vorbemerkung ist $P_0$ exakt, also erhält $I_0$ Injektive.

Damit ist $(I \to 0) \in \mathcal{B}$ injektiv für $I \in \mathcal{A}$ injektiv.

Jetzt nochmal für $P_1: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $(X \to Y) \mapsto Y$.

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P_1(X \xrightarrow{f} Y), Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) = \left\{\beta: Y \to Z : \begin{tikzcd}[sep=small] X \arrow[r, "\beta \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z \arrow[d, "id"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \end{tikzcd}\right\} \cong \{(\alpha, \beta): (X \xrightarrow{f} Y) \to (Z \xrightarrow{id} Z)\} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(X \xrightarrow{f} Y, Z \xrightarrow{id} Z)$$

Also ist $I_{01} \dashv P_1$ mit $I_{01}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $Z \mapsto (Z \xrightarrow{id} Z)$. Weil $P_1$ exakt ist, erhält $I_{01}$ Injektive und damit ist $(I \xrightarrow{id} I) \in \mathcal{B}$ injektiv für $I \in \mathcal{A}$ injektiv.

Sei jetzt $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathcal{B}$. Wähle Monomorphismen $i: X \hookrightarrow I$ und $j: Y \hookrightarrow J$ mit $I, J \in \mathcal{A}$ injektiv. Nach oben sind $I \to 0$ und $J \xrightarrow{id} J$ injektiv in $\mathcal{B}$. Damit auch deren Produkt $I \oplus J \xrightarrow{\pi_2} J$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(i, j\circ f)}"] \arrow[d, "f"'] & I \oplus J \arrow[d, "\pi_2"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

Das Diagramm rechts kommutiert und $(i, j \circ f)$ und $j$ sind Monomorphismen in $\mathcal{A}$. Also ist $((i, j\circ f), j): (X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow (I \oplus J \xrightarrow{\pi_2} J)$ ein Monomorphismus in $\mathcal{B}$ in ein injektives Objekt. Also hat $\mathcal{B}$ genügend Injektive.

Sowohl $(F^n)_{n \geq 0}$ als auch $(R^n F^0)_{n \geq 0}$ sind universelle $\delta$-Funktoren mit gleicher Stufe $0$. Also sind beide isomorph. Insbesondere $\operatorname{coker} = F^1 = R^1 F^0 = R^1 \ker$.

# Aufgabe 3

① Für einen $R$-Modul $M$ ist $F(M) = \mathrm{Hom}_R(A, M)$ ein $A$-Modul:

Abelsche Gruppe ist klar. Für $\varphi \in F(M)$ und $a \in A$ ist $a\cdot\varphi : x \mapsto \varphi(xa)$.

$a\varphi \in F(M)$, denn $(a\varphi)(x+y) = \varphi((x+y)a) = \varphi(xa+ya) = \varphi(xa)+\varphi(ya) = (a\varphi)(x) + (a\varphi)(y)$

$$(a\varphi)(rx) = \varphi(rxa) = r\cdot\varphi(xa) = r\cdot(a\varphi)(x).$$

Modulaxiome:

- $(a(\varphi+\psi))(x) = (\varphi+\psi)(xa) = \varphi(xa)+\psi(xa) = (a\varphi)(x)+(a\psi)(x) = (a\varphi+a\psi)(x)\ \forall x \rightsquigarrow a(\varphi+\psi) = a\varphi+a\psi$
- $((a+b)\varphi)(x) = \varphi(x(a+b)) = \varphi(xa+xb) = \varphi(xa)+\varphi(xb) = (a\varphi)(x)+(b\varphi)(x) = (a\varphi+b\varphi)(x)\ \forall x \rightsquigarrow (a+b)\varphi = a\varphi+b\varphi$
- $((ab)\varphi)(x) = \varphi(xab) = (b\varphi)(xa) = (a(b\varphi))(x)\ \forall x \rightsquigarrow (ab)\varphi = a(b\varphi)$
- $(1\varphi)(x) = \varphi(x1) = \varphi(x)\ \forall x \rightsquigarrow 1\varphi = \varphi.$

Funktorialität: Sei $f: M \to N$ $R$-linear. Sei $Ff: F(M) \to F(N)$, $\varphi \mapsto f\circ\varphi$. $Ff$ ist $A$-linear, denn

$$(Ff)(\varphi+\psi) = f\circ(\varphi+\psi) = (f\circ\varphi)+(f\circ\psi) = (Ff)(\varphi)+(Ff)(\psi)$$

$$(Ff)(a\varphi)(x) = (f\circ a\varphi)(x) = f((a\varphi)(x)) = f(\varphi(xa)) = (Ff)(\varphi)(xa) = (a\cdot(Ff)\varphi)(x)\ \forall x \rightsquigarrow (Ff)(a\varphi) = a((Ff)(\varphi))$$

und $F$ gibt tatsächlich einen additiven Funktor wegen

$$F(id)(\varphi) = id\circ\varphi = \varphi \rightsquigarrow F(id) = id$$

$$F(f\circ g)(\varphi) = f\circ g\circ\varphi = (Ff)(g\circ\varphi) = (Ff)((Fg)\varphi) \rightsquigarrow F(f\circ g) = Ff\circ Fg$$

$$F(f+g)(\varphi) = (f+g)\circ\varphi = (f\circ\varphi)+(g\circ\varphi) = Ff(\varphi)+Fg(\varphi) \rightsquigarrow F(f+g) = Ff+Fg.$$

Adjunktion: Zeige $\mathrm{Hom}_A(M, FN) = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_R(A,N)) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(GM,N)$ für $M \in A\text{-Mod}$, $N \in R\text{-Mod}$.

Definiere dazu $\Phi: \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_R(A,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $f \longmapsto f(-)(1) = (x \mapsto f(x)(1))$ und

$\Psi: \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_R(A,N))$, $g \longmapsto g(-\cdot-) = (x \mapsto g(-\cdot x))$ In $\lambda$-Notation: $\Psi = \lambda g\, x\, a.\, g(a\cdot x)$
$\Phi = \lambda f\, x.\, f(x)(1)$

Es ist wirklich $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, denn

$$\Phi(f)(x+y) = f(x+y)(1) = (f(x)+f(y))(1) = f(x)(1) + f(y)(1) = \Phi(f)(x) + \Phi(f)(y)$$

$$\Phi(f)(rx) = f(rx)(1) = (r\cdot f(x))(1) = f(x)(1r) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Hom}_R(A,N)}(r) = r\cdot(f(x)(1)) = r\cdot\Phi(f)(x).$$

Für $x \in M$ ist $(\Psi(g))(x) = (a \mapsto g(ax)) : A \longrightarrow N$ wirklich $R$-linear, denn

$$(\Psi(g)(x))(a+b) = g((a+b)x) = g(ax+bx) = g(ax) + g(bx) = (\Psi(g)(x))(a) + (\Psi(g)(x))(b)$$

$$(\Psi(g)(x))(ra) = \underbrace{g(rax)}_{R\text{-lin}} = r\cdot g(ax) = r\cdot(\Psi(g)(x)(a))$$

Und tatsächlich ist $\Psi(g)$ $A$-linear:

$$\Psi(g)(x+y)(a) = g(a\cdot(x+y)) = g(ax+ay) = g(ax)+g(ay) = \Psi(g)(x)(a) + \Psi(g)(y)(a) \rightsquigarrow \Psi(g)(x+y) = \Psi(g)(x) + \Psi(g)(y)$$

$$\Psi(g)(ax)(b) = g(bax) = \Psi(g)(x)(ba) = (a(\Psi(g)(x)))(b) \rightsquigarrow \Psi(g)(ax) = a\cdot(\Psi(g)(x))$$

$\Phi$ und $\Psi$ sind invers zueinander:

$$\Psi(\Phi(f))(x)(a) = \Phi(f)(ax) = f(ax)(1) \underset{f\ A\text{-lin}}{=} (a\cdot f(x))(1) = f(x)(1a) = f(x)(a) \rightsquigarrow \Psi(\Phi(f)) = f$$

$$\Phi(\Psi(g))(x) = \Psi(g)(x)(1) = g(1\cdot x) = g(x) \rightsquigarrow \Phi(\Psi(g)) = g$$

Also $G \dashv F$

② Es gibt einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow A$. Weil $\mathrm{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$ genügend Injektive hat, gibt es zu $M \in A\text{-Mod}$ einen Monomorphismus $GM \hookrightarrow I$ mit $I$ injektiv. Als rechtsadjungierter Funktor ist $F$ linksexakt, also ist auch $FGM \hookrightarrow FI$ Monomorphismus. Weil $G$ exakt ist, erhält $F$ Injektive, also ist $FI \in A\text{-Mod}$ injektiv. Finde nun noch $M \hookrightarrow FGM$ Monomorphismus. Wende dazu $\Psi$ von oben an auf $\mathrm{id}: GM \to GM$. Das gibt $M \xrightarrow{i} FGM = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A, M))$, $x \mapsto (a \mapsto \mathrm{id}(ax) = ax)$. Wenn $i(x) = 0$, dann gilt $x = 1 \cdot x = i(x)(1) = 0$. Also $i$ Monomorphismus. $\rightsquigarrow$ $M \hookrightarrow FGM \hookrightarrow FI$.

## Aufgabe 4

(1) Weil $j_U$ eine offene Einbettung ist, ist $j_U^{-1}\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(j_U(V))$ für alle Garben $\mathcal{F}$ auf $U$ und $V \subseteq U$ offen.

Damit ist $(j_U^{-1} i_{x,*}\mathbb{Z})(V) = (i_{x,*}\mathbb{Z})(V) = \mathbb{Z}(i_x^{-1}(V)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases}$. Man erhält einen Morphismus

$\mathbb{Z}_{Prä} \xrightarrow{f} j_U^{-1} i_{x,*}\mathbb{Z}$ von Prägarben gegeben durch $\mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$ auf $V \ni x$ und $\mathbb{Z} \to 0$ auf $V \not\ni x$.

Das induziert $\mathbb{Z} \xrightarrow{f^\#} j_U^{-1} i_{x,*}\mathbb{Z}$ und $j_{U!}\mathbb{Z} \xrightarrow{g} i_{x,*}\mathbb{Z}$ wegen Adjungiertheit.

Zeige, dass $g$ auf allen Halmen surjektiv ist. Weil $x \in X$ abgeschlossen ist, sind alle Halme von $i_{x,*}\mathbb{Z}$ trivial, außer dem an $x$ (Garbe ist $0$ auf jeder offenen Teilmenge von $X \setminus \{x\}$). Dort ist also nichts zu tun. An $x$ sind die Halme $(j_{U!}\mathbb{Z})_x \overset{x \in U}{=} (\mathbb{Z})_x = \mathbb{Z}$ und $(i_{x,*}\mathbb{Z})_x = \varinjlim_{U \ni x} (i_{x,*}\mathbb{Z})(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Die Abbildung $g_x$ zwischen den Halmen ist nach Konstruktion $f^\#_x = f_x$. Auf allen $V \ni x$ ist $f_V$: $\mathbb{Z}_{Prä}(V) \to (j_U^{-1} i_{x,*}\mathbb{Z})(V)$ surjektiv, also auch am Halm.

(2) Die Garbifizierungsabbildung $\mathbb{Z}_{Prä} \to \mathbb{Z}$ liefert $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{Prä}(U) \to \mathbb{Z}(U)$. Sei $\underline{n} \in \mathbb{Z}(U)$ das Bild von $n \in \mathbb{Z}$ darunter. Es erfüllt $\underline{n}_x = n$ für alle $x \in U$. Wegen $(j_{U!}\mathbb{Z})(U) = \mathbb{Z}(U)$ ist $\underline{n} \in (j_{U!}\mathbb{Z})(U)$.

Sei $s \in (j_{U!}\mathbb{Z})(V)$. Beh: $V_n := \{x \in V : s_x = n\}$ ist offen. Sei $x \in V_n$. Wenn $x \in U$, dann ist

$V_n \supseteq V_n \cap U = \{x \in U : s_x = n\} = \{x \in U : (s|_U - \underline{n})_x = 0\} = \underbrace{U \setminus \operatorname{supp}(s|_U - \underline{n})}_{\text{offen}}$, also ist $V_n$ eine Umgebung von $x$.

Wenn $x \notin U$, dann ist $s_x \in (j_{U!}\mathbb{Z})_x = 0$, also $n = 0$. Es ist $V_0 = \{x \in V : s_x = 0\} = V \setminus \operatorname{supp} s$ eine Umgebung von $x$.

Also sind alle $V_n$ offen. Wegen $V = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ und $V$ zusammenhängend ist $V_n = \emptyset$ oder $V_n = V$ für jedes $n$.

Insbesondere $V_0 = \emptyset$ oder $V_0 = V$.

Sei $x \in V \setminus U$. Wie oben folgt $s_x = 0$, also $x \in V_0$. Damit ist $V_0 = \emptyset$ unmöglich und $V_0 = V$ muss gelten.

Damit ist $s_x = 0$ für alle $x \in V$, also $s = 0$.

③ $\mathbb{R}^n, n>0$: $0 \in \mathbb{R}^n$ ist ein abgeschlossener Punkt. Jede Umgebung $U$ von $0$ umfasst ein $B_r(0)$, $r>0$. Dann ist $B_{\frac{r}{2}}(0) \underset{n>0}{\subsetneq} B_r(0) \subseteq U$ eine Umgebung von $0$ und $B_{\frac{r}{2}}(0)$ ist zusammenhängend.

Varietät $X$ positiver Dimension: Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt und $U \ni x$ eine offene Umgebung.

Wähle eine affin-offene Umgebung $V = \operatorname{Spec} R \ni x$ in $U$. Zeige, dass $R$ nicht lokal ist. Dann gibt es neben $x$ einen weiteren abgeschlossenen Punkt $y \in V$. $W = V \setminus \{y\}$ ist dann eine offene Umgebung von $x$ mit $W \subsetneq V \subseteq U$. Weil $X$ irreduzibel ist, ist die offene ($\Rightarrow$ dichte) Teilmenge $W$ auch irreduzibel, also zusammenhängend.

Nach Noethernormalisierung ist $R$ eine endliche $K[X_i : 1 \leq i \leq d]$-Algebra mit $d = \dim R > 0$. $K[\underline{X}]$ ist nicht lokal, also gibt es zwei verschiedene maximale Ideale. Nach Lying-Over gibt es maximale Ideale in $R$, die über diesen beiden liegen. Sie müssen verschieden sein, also ist $R$ nicht lokal.

$\mathbb{A}^n$: Ist eine Varietät $\rightsquigarrow$ folgt aus vorigem Fall.

④ Sei $p: \mathcal{P} \longrightarrow i_{x,*}\mathbb{Z}$ und $s \in \mathcal{P}(U)$. Wenn $x \notin U$, dann ist $p(s) \in (i_{x,*}\mathbb{Z})(U) = 0$, also $p(s) = 0$. Wenn $x \in U$, dann wähle zusammenhängende Umgebungen $V, W$ von $x$ mit $W \subsetneq V \subsetneq U$. Nach ① gibt es einen surjektiven Morphismus $q: j_{W,!}\mathbb{Z} \twoheadrightarrow i_{x,*}\mathbb{Z}$. Weil $\mathcal{P}$ projektiv ist, gibt es ein $\tilde{p}: \mathcal{P} \to j_{W,!}\mathbb{Z}$ mit $q \circ \tilde{p} = p$. Die Einschränkung $(i_{x,*}\mathbb{Z})(U) \to (i_{x,*}\mathbb{Z})(V)$ ist die Identität, also gilt $p(s) = p(s)|_V = p(s|_V) = q\big(\underbrace{\tilde{p}(s|_V)}_{\in (j_{W,!}\mathbb{Z})(V) = 0 \text{ nach } ②}\big) = 0$. Damit ist $p = 0$.

Hätte $\mathrm{Sh}_{Ab}(X)$ genügend Projektive, dann gäbe es ein surjektives $\mathcal{P} \overset{p}{\twoheadrightarrow} i_{x,*}\mathbb{Z}$ mit $\mathcal{P}$ projektiv. Nach oben ist $p = 0$, also $i_{x,*}\mathbb{Z} = 0$ ↯.