

Blatt 8

Aufgabe 1

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{P}_R^1 = \text{Proj } R[x_0, x_1] = \underbrace{\text{Spec } R[T]}_{U_0} \cup \underbrace{\text{Spec } R[T^{-1}]}_{U_1}, \quad T = \frac{x_1}{x_0}. \quad U_{0,1} := U_0 \cap U_1 = \text{Spec } R[T^{\pm 1}].$$

$\mathcal{U} = (U_0, U_1)$ ist eine Überdeckung von $\mathbb{P}_R^1$, sodass alle endlichen Schnittmengen von Überdeckungen affin sind. Nach Vorlesung ist $H^i(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$. Geordneter Čech-Komplex:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_0) \overset{0}{\oplus} \mathcal{O}_X(U_1) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X(U_{0,1}) \overset{1}{\longrightarrow} 0 \longrightarrow \dots \quad \text{mit } d(f, g) = f - g.$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$R[T] \oplus R[T^{-1}] \quad R[T^{\pm 1}]$$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \ker d = \{(f, f) \in R[T] \oplus R[T^{-1}]\} \cong R[T] \cap R[T^{-1}] = R$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \text{coker } d = R[T^{\pm 1}] / (R[T] + R[T^{-1}]) = 0$$

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für } i > 1.$$

$$\textcircled{2} \quad X = U_0 \cup U_1 \quad \text{mit } U_0, U_1 \cong \mathbb{A}_R^1 = \text{Spec } R[T], \quad U_{0,1} := U_0 \cap U_1 = \text{Spec } R[T^{\pm 1}]. \quad \mathcal{U} = (U_0, U_1) \text{ ist Überdeckung von } X,$$

sodass alle endlichen Schnittmengen affin sind. Nach Vorlesung ist $H^i(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$. Geordneter Čech-Komplex:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_0) \overset{0}{\oplus} \mathcal{O}_X(U_1) \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X(U_{0,1}) \overset{2}{\longrightarrow} 0 \longrightarrow \dots \quad \text{mit } d(f, g) = f - g.$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$R[T] \oplus R[T] \quad R[T^{\pm 1}]$$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \ker d = \{(f, f) \in R[T] \oplus R[T]\} \cong R[T] \cong R^{\oplus N}$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \text{coker } d = R[T^{\pm 1}] / R[T] \cong \langle T^n : n \in \mathbb{Z}, n < 0 \rangle_R \cong R^{\oplus \mathbb{N}}$$

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für } i > 1.$$

Aufgabe 2

- ① Sei $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von Garben auf X . Es gibt ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{H}) \end{array}$$

Die Sequenz $0 \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{H})$ erhält man durch Kernbildung der vertikalen Morphismen. Sie ist immer noch exakt, denn nach Blatt 7, Aufgabe 2 ist $\text{Ker}: \text{Hom}(\cdot \rightarrow, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ links-exakt.

- ② Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{res}_{\mathcal{F}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{H}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die Zeilen sind exakt nach Blatt 7, Aufgabe 1. Das Sechsenlemma gibt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma_U(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} \text{coker } \text{res}_{\mathcal{F}}$$

Weswegen $\mathcal{F}$ vollst. ist, ist $\text{res}_{\mathcal{F}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ surjektiv. Also $\text{coker } \text{res}_{\mathcal{F}} = 0$.

- ③ Induktion nach i :

$i=1$ Es gibt eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ mit $\mathcal{J}$ injektiv. Die lange exakte

Kohomologiesequenz enthält $\Gamma_U(X, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_U(X, \mathcal{G}) \rightarrow H_U^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_U^1(X, \mathcal{J})$. Wegen $\mathcal{J}$ injektiv

ist $H_U^1(X, \mathcal{J}) = 0$. Nach ② ist α surjektiv. Damit ist $H_U^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

$i \geq 1$ Es gibt eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ mit $\mathcal{J}$ injektiv. Die lange exakte

Kohomologiesequenz enthält $H_Y^{i-1}(X, \mathcal{G}) \rightarrow H_Y^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H_Y^i(X, \mathcal{J})$. Weil $\mathcal{J}$ injektiv ist, ist $H_Y^i(X, \mathcal{J}) = 0$.

Als injektive Garbe ist $\mathcal{J}$ wehk. Weil $\mathcal{F}$ und $\mathcal{J}$ wehk sind, ist $\mathcal{G}$ auch. Nach Induktion ist

$$H_Y^{i-1}(X, \mathcal{G}) = 0. \text{ Also auch } H_Y^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

④ Sei $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{J}^\bullet$ eine injektive Auflösung. Jedes $\mathcal{J}^n$ ist wehk, also ist $\mathcal{J}^n(X) \rightarrow \mathcal{J}^n(U)$ surjektiv. Damit

gilt es exakte Sequenzen $0 \rightarrow \Gamma_Y^i(X, \mathcal{J}^n) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^n) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{J}^n) \rightarrow 0$ von abelschen Gruppen. Zusammen

ergibt das eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \Gamma_Y^i(X, \mathcal{J}^\bullet) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{J}^\bullet) \rightarrow 0$. Die lange exakte

Kohomologiesequenz dazu ist genau die gesuchte.

Aufgabe 3

① Für alle $V \subseteq X \setminus Y$ ist $(i_* F)(V) = F(\emptyset) = 0$, also $(i_* F)_x = ((i_* F)|_{X \setminus Y})_x = 0_x = 0$ für $x \notin Y$.

Sei nun $x \in Y$. Definiere $\varphi: (i_* F)_x \rightarrow F_x$, $[s] \in (i_* F)(V) \mapsto [s \in F(V \cap Y)]$. Das ist wohldefiniert,

denn für $s \in (i_* F)(V)$ und $W \subseteq V$ ist $\varphi([s|_W]) = \varphi([s|_{W \cap Y}]) = [s|_{W \cap Y}] = [s] = \varphi([s])$.

Sei $[s] \in F_x$ für ein $s \in F(V)$. Weil V in Y offen ist, ist $V = \tilde{V} \cap Y$ für ein $\tilde{V} \subseteq X$ offen. Es ist

$s \in F(\tilde{V} \cap Y) = (i_* F)(\tilde{V})$ und $\varphi([s]) = [s]$. Damit ist φ surjektiv.

Für Injektivität sei $s \in (i_* F)(V) = F(V \cap Y)$ mit $\varphi([s]) = 0$. In F_x ist $[s] = 0$, also gibt es eine offene Umgebung

$W \subseteq V \cap Y$ von x mit $s|_W = 0$. Wähle $\tilde{W} \subseteq X$ offen mit $W = \tilde{W} \cap Y$. Indem man ggf. $\tilde{W}$ durch $\tilde{W} \cap V$ ersetzt,

kann man $\tilde{W} \subseteq V$ annehmen. In $(i_* F)_x$ gilt $[s] = [s|_{\tilde{W}}] = [s|_{\tilde{W} \cap Y}] = [s|_W] = 0$.

Einsetzen von $\tilde{W}$ als Schritt vor φ

Damit ist $\varphi: (i_* F)_x \xrightarrow{\sim} F_x$.

② Sei $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ eine exakte Sequenz in $Sh_{Ab}(Y)$. Teste Exaktheit von $i_* F \xrightarrow{i_* \alpha} i_* G \xrightarrow{i_* \beta} i_* H$ am

Halmen. Für $x \in Y$ ist $(i_* F)_x \xrightarrow{(i_* \alpha)_x} (i_* G)_x \xrightarrow{(i_* \beta)_x} (i_* H)_x$ nach ① gerade $F_x \xrightarrow{\alpha_x} G_x \xrightarrow{\beta_x} H_x$, also exakt.

Für $x \notin Y$ ist sie $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ also auch exakt.

③ Sei $F \rightarrow \mathcal{I}$ eine injektive Auflösung. Nach ② ist $i_* F \rightarrow i_* \mathcal{I}$ ebenfalls eine Auflösung. i_* ist rechts-

adjungiert zum exakten Funktor $i^!$ und erhält somit Injektivität. Es ist $i_* F \rightarrow i_* \mathcal{I}$ also eine injektive Auflösung.

$$H^i(X, i_* F) = H^i(\Gamma(X, i_* \mathcal{I})) = H^i(\Gamma(Y, \mathcal{I})) = H^i(Y, F)$$

④ Zeige, dass $i_! i_x^{-1}: \mathcal{S}_{\mathcal{A}b}(Y) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}b}(Y)$ und $i_x i_!^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ isomorph zur Identität sind.

Für $\mathcal{F} \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}b}(Y)$ sind die Halme von $i_! i_x^{-1} \mathcal{F}$ gerade $(i_! i_x^{-1} \mathcal{F})_x = (i_x \mathcal{F})_x^{\oplus} = \mathcal{F}_x$. Also ist der natürliche Morphismus

$\varepsilon_{\mathcal{F}}: i_! i_x^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ („Koeinheit“) ein Isomorphismus an allen Halmen. Deshalb ist $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ ein Isomorphismus von Garben und $i_! i_x^{-1} \cong \text{Id}$

via ε .

Für $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ bestimme die Halme von $i_x i_!^{-1} \mathcal{G}$. Für $x \in Y$ ist $(i_x i_!^{-1} \mathcal{G})_x^{\oplus} = (i_!^{-1} \mathcal{G})_x = \mathcal{G}_x$, für $x \notin Y$ ist $(i_x i_!^{-1} \mathcal{G})_x^{\oplus} = 0_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}} \mathcal{G}_x$. Wie oben ist

die Einheit $\eta_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow i_x i_!^{-1} \mathcal{G}$ ein Isomorphismus, also $\text{Id} \cong i_x i_!^{-1}$ via η .

Aufgabe 4

- ① Als Prägarbe gibt $i_{1,*} \mathbb{Z}_{Y, \text{pre}} = \mathbb{Z}_{X, \text{pre}}$. Die Garbifizierung $\# : \mathbb{Z}_{Y, \text{pre}} \rightarrow \mathbb{Z}_Y$ liefert $i_{1,*}(\#) : \mathbb{Z}_{X, \text{pre}} \rightarrow i_{1,*} \mathbb{Z}_Y$. Nach universeller Eigenschaft induziert das $\alpha_1 : \mathbb{Z}_X \rightarrow i_{1,*} \mathbb{Z}_Y$. Für $x \in Y_1$ ist $\#_x : \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_{Y, \text{pre}})_x \rightarrow (\mathbb{Z}_Y)_x = \mathbb{Z}$ die Identität, also auch $i_{1,*}(\#)_x : \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_{X, \text{pre}})_x \rightarrow (i_{1,*} \mathbb{Z}_Y)_x = (\mathbb{Z}_Y)_x$ und $(\alpha_1)_x : \mathbb{Z} = (\mathbb{Z}_X)_x \rightarrow (i_{1,*} \mathbb{Z}_Y)_x = \mathbb{Z}$.

In ähnlicher Weise konstruiert man $\alpha_2 : \mathbb{Z}_X \rightarrow i_{2,*} \mathbb{Z}_Y$, $\beta_1 : i_{1,*} \mathbb{Z}_Y \rightarrow i_{12,*} \mathbb{Z}_{Y_2}$ und $\beta_2 : i_{2,*} \mathbb{Z}_Y \rightarrow i_{12,*} \mathbb{Z}_{Y_2}$.

Das gibt eine Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \xrightarrow{(\alpha_1)} i_{1,*} \mathbb{Z}_Y \oplus i_{2,*} \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} i_{12,*} \mathbb{Z}_{Y_2} \rightarrow 0$. Teste Exaktheit an Halmen. Dazu lassen sich mit Aufgabe 3 berechnen.

$x \in Y_1 \cap Y_2$: Halmssequenz ist $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(1)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(1, -1)} \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Exakt.

$x \in Y_1 \setminus Y_2$: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(1)} \mathbb{Z} \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ exakt

$x \in Y_2 \setminus Y_1$: $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(1)} 0 \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$ exakt

Also ist die Sequenz exakt.

- ② Die lange exakte Kohomologiesequenz zu ① ist $H^i(X, \mathbb{Z}_X) \rightarrow H^i(X, i_{1,*} \mathbb{Z}_Y \oplus i_{2,*} \mathbb{Z}_Y) \rightarrow H^i(X, i_{12,*} \mathbb{Z}_{Y_2}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_X)$.

Nach Aufgabe 3 ist das $\rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(Y_1, \mathbb{Z}) \oplus H^i(Y_2, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(Y_{12}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$

- ③ $H^0(S^0, \mathbb{Z}) = \Gamma(S^0, \mathbb{Z}) = \Gamma(B^0 \cup B^0, \mathbb{Z}) \cong \Gamma(B^0, \mathbb{Z})^2 \cong \mathbb{Z}^2$, weil B^0 zusammenhängend ist

$$H^i(S^0, \mathbb{Z}) = H^i(B^0, \mathbb{Z})^2 = 0 \text{ für } i > 0$$

Beh: Für $n > 0$ ist $H^i(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0 \vee i=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis mit Induktion nach n .

$n=1$: S^1 ist zusammenhängend, also ist $H^0(S^1, \mathbb{Z}) = \Gamma(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ hat eine abgeschlossene

Überdeckung (S_+^1, S_-^1) mit $S_\pm^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \pm y \geq 0\} \cong \mathbb{B}^1$. Dabei ist



$S_+^1 \cap S_-^1 = \{(1,0), (-1,0)\} \cong S^0$. Nach ① gibt es eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) \oplus H^0(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad} & H^0(S^0, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(S^1, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) \oplus H^1(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) \\ \parallel \cong & & \parallel \cong & & & & \parallel \cong \\ \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z}^2 & & & & 0 \end{array}$$

Also ist $H^1(S^1, \mathbb{Z}) = \text{coker } r$. Nach Konstruktion aus ② sendet r (u,m) auf $(u-m, u-m)$, also ist

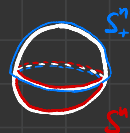
$$H^1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Für höhere Kohomologien enthält die gleiche lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} H^{i+1}(S^1, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^i(S^1, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^i(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) \oplus H^i(\mathbb{B}^1, \mathbb{Z}) & \Rightarrow & H^i(S^1, \mathbb{Z}) = 0 \text{ für } i > 1. \\ \parallel & & & & \parallel & & \\ 0 & & & & 0 & & \end{array}$$

$n \geq 1$: S^n ist zusammenhängend, also $H^0(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Überdecke $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ mit den abgeschlossenen Mengen $S_+^n = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$



und $S_-^n = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$. Beide sind homöomorph zu $\mathbb{B}^n$ und $S_+^n \cap S_-^n \cong S^{n-1}$.

② gibt eine lange exakte Sequenz, die $H^0(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \oplus H^0(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong \mathbb{Z}^2} H^0(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong \mathbb{Z}} H^1(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \oplus H^1(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong 0}$

enthält. Also ist $H^1(S^n, \mathbb{Z}) = \text{coker}(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z})$. Weil r von den Restriktionen herkommt, ist $r: (u,m) \mapsto n-m$.

Damit ist r surjektiv, also $H^1(S^n, \mathbb{Z}) = 0$.

Die gleiche lange exakte Sequenz enthält $H^{i+1}(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \oplus H^{i+1}(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong \mathbb{Z}^2} H^{i+1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong \mathbb{Z}} H^i(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \oplus H^i(\mathbb{B}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\parallel \cong 0}$

für $i > 1$. Also $H^i(S^n, \mathbb{Z}) = H^{i-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n-1=i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Insgesamt also $H^i(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{[1,0]} \oplus \mathbb{Z}^{[i,n]}$

(Versauklammer: $[p] = \begin{cases} 1 & p \text{ unger} \\ 0 & p \text{ falsch} \end{cases}$)