Blatt 10

Aufgabe 1

① Wegen $f_x = g_x$ ist $y := f(x) = f_x(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}) = g_x(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}) = g(x)$. Wähle eine affin-offene Umgebung $V = \operatorname{Spec} A$ von $y \in Y$.

Dann ist $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von $x \in X$. Wähle eine affin-offene Umgebung $U = \operatorname{Spec} B$ von x innerhalb dieser Menge. Die Einschränkungen $f|_U, g|_U : U \to V$ entsprechen nun Ringhomomorphismen $\varphi, \psi : A \to B$. Wenn $x \in U$ das Primideal $\mathfrak{q} \in B$ ist, dann sind in $A \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} B \to B_{\mathfrak{q}}$ beide Kompositionen $A \to B_{\mathfrak{q}}$ gleich.

Weil Y von endlichem Typ ist, wird A über R von endlich vielen $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ erzeugt. Wir wissen, dass in $B_{\mathfrak{q}}$ $\frac{\varphi(a_i)}{1} = \frac{\psi(a_i)}{1}$. Es gibt also ein $s_i \in B \setminus \mathfrak{q}$ mit $s_i \varphi(a_i) = s_i \psi(a_i)$. Definiere $s := \prod_{i=1}^{n} s_i \notin \mathfrak{q}$. Dann ist $s\varphi(a_i) = s\psi(a_i)$ für alle i, also $\frac{\varphi(a_i)}{1} = \frac{\psi(a_i)}{1}$ in B_s für alle i. Weil A von den a_i erzeugt wird, sind $A \xrightarrow{\varphi} B \to B_s$ und $A \xrightarrow{\psi} B \to B_s$ gleich. Das bedeutet, dass $D(s) \hookrightarrow U \xrightarrow{f} V$ und $D(s) \hookrightarrow U \xrightarrow{g} V$ gleich sind. Mit $U' = D(s)$ ist also $f|_{U'} = g|_{U'}$. Wegen $x \in U$, $s \notin \mathfrak{q}$ ist $x \in U'$, also ist U' eine offene Umgebung von x.

② Sei $y := h(\mathfrak{m}_x) \in Y$. Wähle eine affin-offene Umgebung $V = \operatorname{Spec} A$ von $y \in Y$. Dabei ist A eine endlich erzeugte R-Algebra. Weil R noethersch ist, hat A die Form $R[T_i : 1 \leq i \leq n]/(p_j : 1 \leq j \leq m)$. Außerdem sei $U = \operatorname{Spec} B$ eine affin-offene Umgebung von $x \in X$. Der Punkt $x \in U$ ist ein Primideal $\mathfrak{q} \in B$.

Jeder Punkt $z \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ ist Generisierung des speziellen Punktes $\mathfrak{m}_x$. Dann ist $h(z)$ eine Generisierung von $y \in V$, also selbst ein Element in V. Also schränkt sich h ein zu $h : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to V$. Dazu gehört ein Morphismus $A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_{X,x} = B_{\mathfrak{q}}$ von R-Algebren.

Schreibe $\varphi(a_i) = \frac{b_i}{s_i} \in B_{\mathfrak{q}}$ mit $s_i \in B \setminus \mathfrak{q}$. Sei $s := \prod_{i=1}^{n} s_i \notin \mathfrak{q}$. Für jedes j ist $0 = h(0) = h(\bar{p}_j) = p_j((\frac{b_i}{s_i})_{1\leq i \leq n})$. Schreibe

$p_j = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq d}} r_{j,\alpha} \underline{T}^{\alpha} \Rightarrow 0 = \sum_{\alpha} r_{j,\alpha} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{s_i}\right)^{\alpha_i} = \frac{c_j}{s^d}$ mit $c_j \in B$ dem Zähler, der beim Ausrechnen da rauskommt.

Dann existiert ein $t_j \in B \setminus \mathfrak{q}$ mit $t_j c_j = 0$. Sei $t := \prod_{j=1}^{m} t_j$. Definiere nun $U' := D(st) \cong \operatorname{Spec} B_{st}$ und $f_0 : U' \to V$

durch $\psi : A = R[\underline{T}]/(\underline{p}) \longrightarrow B_{st}$, $T_i \longmapsto \frac{b_i}{s_i}$. Das ist wohldefiniert, denn $p_j = \sum_{\alpha} r_{j,\alpha} \underline{T}^{\alpha}$ wird geschickt auf

$\sum_{\alpha} r_{j,\alpha} \prod_i \left(\frac{b_i}{s_i}\right)^{\alpha_i} = \frac{c_j}{s^d} = \frac{t^d c_j}{(st)^d} = 0$ wegen $t_j c_j = 0$ in B. Wegen $s, t_j \notin \mathfrak{q}$ ist $st \notin \mathfrak{q}$, also $x \in U'$.

Sei nun f die Komposition $U' \xrightarrow{f_0} V \hookrightarrow Y$. Behauptung: $f_x = h$. Zeige dazu, dass $f_{0,x} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to V$

und die Koeinschränkung von h gleich sind. Das ist klar, weil die zugehörigen Ringhomomorphismen

$A \xrightarrow{\psi} B_{st} \to B_{\mathfrak{q}}$ und $A \xrightarrow{\varphi} B_{\mathfrak{q}}$ beide T_i auf $\frac{b_i}{s_i}$ schicken und A von den T_i erzeugt wird.

<u>Aufgabe 2</u> Weil $\mathcal{E}$ und $f^*\mathcal{E}$ lokal frei sind, sind die Funktoren $- \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ und

$- \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E} : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ exakt. Außerdem ist $(R^i f_*)_{i\geq 0} : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-Mod}$ ein exakter δ-Funktor.

Damit sind die Kompositionen $F = \left((- \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}) \circ R^i f_* \right)_{i \geq 0}$ und $G = \left(R^i f_* \circ (- \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \right)_{i\geq 0}$ exakte δ-Funktoren mit

$$F^0 = (- \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}) \circ f_* \overset{\text{wie Blatt 1}}{\underset{\text{Aufg 2}}{\cong}} f_* \circ (- \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) = G^0$$

F ist auslöschbar: Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Wähle $\mathcal{F} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{J}$ injektiv mit $\mathcal{J}$ injektivem $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $F^i \mathcal{J} = 0 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} = 0$

für $i > 0$. Damit ist auch $F^i \iota = 0$. Also F auslöschbar und damit universell. Der natürliche Isomorphismus

$\eta^0 : F^0 \to G^0$ dehnt sich also aus zu einem Morphismus $\eta : F \to G$ von δ-Funktoren. Teste Isomorphie

nur lokal.

Sei $V \subseteq Y$ offen und $U := f^{-1}(V) \subseteq X$. Dann sind $\cdot|_U : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_U\text{-Mod}$ und $\cdot|_V : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_V$ exakt und

erhalten Welkheit. Insbesondere gehen injektive Garben auf azyklische. Damit gilt:

$$\left(R^i f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \right)\Big|_V \overset{\cdot|_V \text{ exakt}}{=} R^i(\cdot|_V \circ f_*)(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) = R^i\left((f|_U)_* \circ \cdot|_U \right)(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \overset{\cdot|_U \text{ exakt, inj} \mapsto \text{azykl.}}{=} R^i (f|_U)_* \left((\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E})|_U \right) = R^i (f|_U)_* \left(\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \underbrace{(f|_U)^* \mathcal{E}|_V}_{\text{frei für } V \text{ klein genug}} \right)$$

Analog $\left(R^i f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \right)\Big|_V = R^i (f|_U)_* (\mathcal{F}|_U) \otimes_{\mathcal{O}_V} \underbrace{\mathcal{E}|_V}_{\substack{\text{frei für } V \\ \text{klein genug.}}}$

Also ist oBdA $\mathcal{E}$ frei, etwa $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^n$. Dann ist $R^i f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) = R^i f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^n) \cong R^i f_* (\mathcal{F}^n) \cong (R^i f_* \mathcal{F})^n \cong R^i f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$.

Aufgabe 3 Seien zunächst $Y = \operatorname{Spec} A$ und $Y' = \operatorname{Spec} A'$ affin. Nach Vorlesung ist

$h^* R^i f_* \mathcal{F} = h^* \widetilde{H^i(X,\mathcal{F})} = (H^i(X,\mathcal{F}) \otimes_A A')^\sim$ und $R^i f'_* g^* \mathcal{F} = H^i(X', g^*\mathcal{F})^\sim$. Zeige also $H^i(X', g^*\mathcal{F}) = H^i(X,\mathcal{F}) \otimes_A A'$.

Weil f quasikompakt ist, ist auch X quasikompakt. Damit gibt es eine endliche affin-offene Überdeckung

$(U_i)_{i\in I}$ von X. Wenn $U_i := \operatorname{Spec} B_i$, dann bilden die $U_i' := g^{-1}(U_i) = U_i \times_Y Y' = \operatorname{Spec}(B_i \otimes_A A')$ eine affin-offene Überdeckung

von X'. Weil X und X' separiert sind, kann man nun Čechkohomologie nutzen:

$$H^i(X', g^*\mathcal{F}) = \check{H}^i((U_i'), g^*\mathcal{F}) = H^i\Big(\_ \to \prod_{\alpha\in I^{n+1}} (g^*\mathcal{F})\big(\bigcap_{k=0}^{n} U'_{\alpha(k)}\big) \to \_\Big) = H^i\Big(\big(\_ \to \prod_\alpha \mathcal{F}\big(\bigcap_k U_{\alpha(k)}\big) \to \_\big) \otimes_A A'\Big)$$

$$\overset{A\to A'}{\underset{\text{flach}}{=}} H^i\Big(\_ \to \prod_\alpha \mathcal{F}\big(\bigcap_k U_{\alpha(k)}\big) \to \_\Big) \otimes_A A' = \check{H}^i((U_i), \mathcal{F}) \otimes_A A' = H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A'$$

Seien nun Y und Y' beliebig. Weil h flach ist, ist h^* exakt. $(R^i f_*)_i$ ist ein exakter δ-Funktor. Zusammen ist

$(h^* \circ R^i f_*)_i$ ein exakter δ-Funktor. Mit $(R^i f_*)_i$ ist auch $(h^* \circ R^i f_*)_i$ auslöschbar, also universell. Analog ist auch $(R^i f'_* g^*)_i$ ein

exakter δ-Funktor. Dieser ist aber nicht universell. Konstruiere nun eine natürliche Transformation zwischen den nullten Stufen,

also $h^* \circ f_* \to f'_* \circ g^*$. Beginne mit $g^* \xrightarrow{id} g^*$. Adjunktion gibt $\mathrm{Id} \to g_* g^*$. Jetzt wende darauf f_* an.

$$\rightsquigarrow \quad f_* \to f_* \circ g_* \circ g^* = h_* \circ f'_* \circ g^*$$

Nochmal Adjunktion gibt $h^* \circ f_* \to f'_* \circ g^*$. Weil $(h^* \circ R^i f_*)_i$ universell ist, dehnt sich das aus zu einem Morphismus

$h^* \circ R^i f_* \to R^i f'_* \circ g^*$. Teste nun lokal, dass für $\mathcal{F}$ quasikohärent der Morphismus $h^* R^i f_* \mathcal{F} \to R^i f'_* \circ g^*$ ein Isomorphismus

ist.

Seien $V \subseteq Y$ und $V' \subseteq Y'$ affin-offen mit $h(U') \subseteq U$. Die Funktoren $\cdot|_V : \mathcal{O}_Y\text{-Mod} \to \mathcal{O}_V\text{-Mod}$ und $\cdot|_{V'} : \mathcal{O}_{Y'}\text{-Mod} \to \mathcal{O}_{V'}\text{-Mod}$

sind exakt. Außerdem erhalten sie Welkheit und schicken damit injektive Modulgarben auf azyklische.

Sei $U := f^{-1}(V)$. Dann gilt das alles natürlich auch für $\cdot|_U : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \to \mathcal{O}_U\text{-Mod}$.

$$(h^* R^i f_* \mathcal{F})|_{V'} = (h|_{V'})^* \big((R^i f_* \mathcal{F})|_V\big) \overset{\cdot|_V \text{ exakt}}{=} (h|_{V'})^* R^i(\cdot|_V \circ f_*)\mathcal{F} = (h|_{V'})^* R^i((f|_U)_* \circ \cdot|_U)\mathcal{F} \underset{\text{inj} \mapsto \text{azykl.}}{\overset{\cdot|_U \text{ exakt,}}{=}} (h|_{V'})^* R^i (f|_U)_* (\mathcal{F}|_U)$$

Analog ist $(R^i f'_* g^* \mathcal{F})|_{V'} = R^i(f'|_{U'})_* (g|_{U'})^* (\mathcal{F}|_U)$ mit $U' = (f')^{-1}(V')$. Nach dem affinen Fall oben ist $(h^* R^i f_* \mathcal{F})|_{V'} \longrightarrow (R^i f'_* g^* \mathcal{F})|_{V'}$ ein Isomorphismus. Mit solchen V' lässt sich Y' überdecken,

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "g|_{U'}"] \arrow[d, "f|_{U'}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d, "f|_U"] \\ V' \arrow[r, "h|_{V'}"'] & V \end{tikzcd}$$

also sind wir fertig.

Aufgabe 4

① $R/\mathfrak{m}$ ist eine Körpererweiterung von K, die als K-Algebra endlich erzeugt ist. Nach einer Folgerung aus Artin-Tate (Anfang AG 1) ist $K_n = R/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von K. Wegen $K_i \subseteq K_n$ ist jedes K_i eine endliche K-Algebra. Außerdem ist K_i nullteilerfrei als Unterring eines Körpers. Nach Algebra 1 ist K_i ein Körper.

Zeige mit Induktion nach i, dass $\mathfrak{m}_i := \mathfrak{m} \cap K[T_1, \dots, T_i]$ von i Elementen erzeugt wird.

$i=0$: $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap K = 0$ wird von $\emptyset$ erzeugt

$0 < i \leq n$: $K[T_1, \dots, T_i] \to R/\mathfrak{m}$, $T_j \mapsto T_j + \mathfrak{m}$ hat per Definition das Bild K_i. Der Kern ist $\mathfrak{m} \cap K[T_1, \dots, T_i] = \mathfrak{m}_i$. Also ist

$K_i = K[T_1, \dots, T_i]/\mathfrak{m}_i$. Analog für K_{i-1}

Über K_{i-1} wird K_i vom Element T_i erzeugt, also ist $K_i = K_{i-1}[T_i]/\tilde{\mathfrak{m}}_i$. Weil K_i ein Körper ist, ist $\tilde{\mathfrak{m}}_i$ maximal im Hauptidealring $K_{i-1}[T_i]$, also $\tilde{\mathfrak{m}}_i = (p_i)$.

$$\Rightarrow K[T_1, \dots, T_i]/\mathfrak{m}_i = K_i = K_{i-1}[T_i]/(p_i) = (K[T_1, \dots, T_{i-1}]/\mathfrak{m}_{i-1})[T_i]/(p_i) = (K[T_1, \dots, T_i]/\mathfrak{m}_{i-1}K[T_1, \dots, T_i])/(p_i) = K[T_1, \dots, T_i]/(\mathfrak{m}_{i-1} + (p_i))$$

Das bedeutet $\mathfrak{m}_i = (\mathfrak{m}_{i-1} + (p_i))$. Nach Induktion wird $\mathfrak{m}_{i-1}$ von $i-1$ Elementen erzeugt, also wird $\mathfrak{m}_i$ von i Elementen erzeugt.

② Angenommen, $\mathfrak{q} \cap K[T_i] \neq 0$ $\forall i$. Für jedes i wähle $f_i \in \mathfrak{q} \cap K[T_i]$. Dann ist $\mathfrak{q} \supseteq (f_i : 1 \leq i \leq n)$. Damit entspricht $\mathfrak{q}$ einem Primideal $\bar{\mathfrak{q}}$ in $R/(f_i : 1 \leq i \leq n)$. Weil $\mathfrak{q}$ nicht maximal ist, ist auch $\bar{\mathfrak{q}}$ nicht maximal.

Sei $S_i := K[T_1, \dots, T_i]/(f_1, \dots, f_i)$ für $0 \leq i \leq n$. Dann ist $S_i = S_{i-1}[T_i]/(f_i)$ eine endliche S_{i-1}-Algebra. Induktiv folgt, dass $S_n = R/(f_i : 1 \leq i \leq n)$ eine endliche $S_0 = K$-Algebra ist. Weil endliche K-Algebren Dimension ≤ 0 haben (s.u.), ist $\bar{\mathfrak{q}}$ maximal. ↯

Lem: Sei R eine endliche K-Algebra. Dann ist jedes Primideal in R maximal.

Bew: Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$. Dann ist $R/\mathfrak{q}$ eine endliche nullteilerfreie K-Algebra, also ein Körper. Es folgt, dass $\mathfrak{q}$ in R maximal ist.

③ Wegen $\mathfrak{q} \cap R[T_i] = 0$ ist $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, also ist $S^{-1}\mathfrak{q}$ ein Primideal von $S^{-1}R$.

$$S^{-1}R = (K[T_i]\setminus\{0\})^{-1}K[T_1,\dots,T_n] = \big((K[T_i]\setminus\{0\})K[T_i]\big)[T_1,\dots,\hat{T}_i,\dots,T_n] = K(T_i)[T_1,\dots,\hat{T}_i,\dots,T_n] \cong K(T)[T_1,\dots,T_{n-1}]$$

In R gibt es die Primidealkette $0 \subsetneq (T_1) \subsetneq (T_1,T_2) \subsetneq \dots \subsetneq (T_1,\dots,T_n)$ der Länge n. $\rightsquigarrow \dim R \geq n$.

Zeige $\dim R \leq n$ mit Induktion. Für $n=0$ ist R ein Körper, also $\dim R = 0$. Sei nun $n>0$ und $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ eine Primidealkette. Zeige $m \leq n$.

$\mathfrak{q}_{m-1}$ ist nicht maximal, also ist $\mathfrak{q}_{m-1} \cap K[T_i] = 0$ für ein i, oBdA für $i=n$. Jetzt ist $S^{-1}\mathfrak{q}_0 \subsetneq \dots \subsetneq S^{-1}\mathfrak{q}_{m-1}$ eine Primidealkette in $S^{-1}R$, $S = K[T_n]\setminus\{0\}$. Nach oben ist $S^{-1}R$ ein Polynomring in $n-1$ Variablen über dem Körper $K(T_n)$. Nach Induktion ist $\dim S^{-1}R \leq n-1$, also $m-1 \leq n-1 \Rightarrow m \leq n$.