Blatt 11

Aufgabe 1

① Sei $V = \operatorname{Spec} R$ eine affin-offene Umgebung von y in Y. Nach Vorlesung ist $U = \pi^{-1}(V) = \operatorname{Spec} S$ für eine endliche R-Algebra S. Nach ausreichendem Verkleinern von V ist sogar S frei als R-Modul, etwa $S \cong R^n$.

$$\Rightarrow K(Y)^n = R^n \otimes_R K(Y) \cong S \otimes_R K(Y) = (R\setminus\{0\})^{-1} S$$

Weil S über R endlich ist, ist der Ring oben endlich – also ganz – über dem Körper $K(Y)$ und damit selbst ein Körper. $\Rightarrow (R\setminus\{0\})^{-1}S = \operatorname{Quot}(S) = K(X) \quad \Rightarrow n = \dim_{K(Y)} (R\setminus\{0\})^{-1} S = [K(X) : K(Y)] = d$

Also $S \cong R^d$. Nun ist $X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) = U \times_V \operatorname{Spec} k(y) = \operatorname{Spec} A$ mit $A = S \otimes_R k(y) \cong R^d \otimes_R k(y) = k(y)^d$

$\rightsquigarrow A$ ist d-dimensionale $k(y)$-Algebra

② $\operatorname{Hom}_{\text{Kurven}/k}(X, \mathbb{P}^1_k) \overset{\text{VL}}{\cong} \underset{\varphi \mapsto \varphi(t)}{\operatorname{Hom}_k(k(t), K(X))} \cong \{f \in K(X) \text{ transzedent} / k\} \underset{\substack{k \text{ alg. abg.} \\ \text{in } K(X)}}{=} K(X) \setminus k. \quad \rightsquigarrow \pi$ entspricht $f \in K(X)\setminus k$

$\mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[T_0, T_1]$ enthält die Punkte $0 := (T_1)$ und $\infty := (T_0)$ (interpretiere t als $\frac{T_1}{T_0}$). Sei x ein abgeschlossener Punkt auf X.

- $\pi(x) \notin \{0, \infty\}$: π induziert einen lokalen Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k, \pi(x)} \xrightarrow{\pi_x^\#} \mathcal{O}_{X,x}$, der eine Einschränkung von $k(t) = K(\mathbb{P}^1_k) \xrightarrow{t \mapsto f} K(X)$ ist. Wegen $\operatorname{div} t = [0] - [\infty]$ ist $v_{\pi(x)}(t) = 0$, also $t \in \mathcal{O}^\times_{\mathbb{P}^1_k, \pi(x)}$. Als lokaler Morphismus erhält $\pi_x^\#$ Einheiten. $\Rightarrow f = \pi_x^\#(t) \in \mathcal{O}^\times_{X,x} \Rightarrow v_x(f) = 0$

- $\pi(x) = 0$: Wie oben gibt es $k[t]_{(t)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k, 0} \xrightarrow{\pi_x^\#} \mathcal{O}_{X,x}$. Wegen $t \in k[t]_{(t)}$ ist $f = \pi_x^\#(t) \in \mathcal{O}_{X,x}$, also $v_x(f) \geq 0$.

  Sei $D_+ := \sum_{\pi(x)=0} v_x(f) \cdot x \geq 0$. Wende nun ① auf $y = 0$ an, um den Grad von D_+ zu bestimmen.

$X \times_{\mathbb{P}^1_k} \operatorname{Spec} k(0)$ ist das Spektrum einer d-dimensionalen k-Algebra A. Dann ist A artinsch, also Produkt aller seiner Lokalisierungen an Primidealen. Andererseits ist $X \times_{\mathbb{P}^1_k} \operatorname{Spec} k(0)$ die Faser von 0 unter π. Die Primideale von A sind also gerade die $x \in X$ mit $\pi(x) = 0$.

$$\Rightarrow A = \prod_{\pi(x)=0} A_x \quad \Rightarrow \operatorname{Spec} A = \coprod_{\pi(x)=0} \operatorname{Spec} A_x = \coprod_{\pi(x)=0} \left(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \times_X \operatorname{Spec} A\right) = \coprod_{\pi(x)=0} \left(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \times_X X \times_{\mathbb{P}^1_k} \operatorname{Spec} k(0)\right)$$

$$= \coprod_{\pi(x)=0} \left(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \times_{\mathbb{P}^1_k} \operatorname{Spec} k(0)\right) = \coprod_{\pi(x)=0} \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{k[t]} \left(k[t]/(t)\right)\right) = \operatorname{Spec}\left(\prod_{\pi(x)=0} \mathcal{O}_{X,x}/(f)\right)$$

werden beide nach $\operatorname{Spec} k[t] \subseteq \mathbb{P}^1_k$ abgebildet

$$\Rightarrow A = \prod_{\pi(x)=0} \mathcal{O}_{X,x}/(f)$$

$$\Rightarrow d = \dim_k A = \sum_{\pi(x)=0} \dim_k \overset{\text{DVR}}{\mathcal{O}_{X,x}}/(f) = \sum_{\pi(x)=0} v_x(f) \cdot \dim_k k(x) = \sum_{\pi(x)=0} v_x(f) \cdot [k(x):k] = \deg D_+$$

- $\pi(x) = \infty$: Oben f durch f^{-1} und t durch t^{-1} ersetzen ergibt $D_- := \sum_{\pi(x)=\infty} -v_x(f) \cdot x \geq 0$ und $\deg D_- = d$.

Insgesamt ist $\operatorname{div} f = \sum_{x \in X^{(1)}} v_x(f) \cdot x = \sum_{\pi(x)=0} v_x(f) \cdot x - \sum_{\pi(x)=\infty} -v_x(f) \cdot x + \sum_{\pi(x)\neq 0,\infty} v_x(f) \cdot x = D_+ - D_- + 0.$

Aufgabe 2

① Sei $D=\sum_{x\in X^{(1)}} n_x\cdot x$ mit $n_x\geq 0$. Definiere einen k-Vektorraum $V:=\bigoplus_{x\in X^{(1)}} \pi_x^{-n_x}\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}$, wobei $\pi_x\in\mathcal{O}_{X,x}$ ein Uniformisator ist (das heißt $v_x(\pi_x)=1$). Dann ist $\dim_k V=\sum_{x\in X^{(1)}}\dim_k(\pi_x^{-n_x}\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x})=\sum_{x\in X^{(1)}} n_x\cdot\dim_k k(x)=\deg D$.

Nun definiere eine lineare Abbildung $\lambda: H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\to V$. Sei $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$. Für jedes $x\in X^{(1)}$ ist nach Definition von $\mathcal{O}_X(D)$ $n_x+v_x(f)\geq 0$, also $f\in\pi_x^{-n_x}\mathcal{O}_{X,x}\subseteq k(X)$. Definiere damit $\lambda(f):=(f+\mathcal{O}_{X,x})_{x\in X^{(1)}}\in V$.

Bestimme nun den Kern von λ. Sei $f\in\ker\lambda$. Dann ist $f\in\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x\in X^{(1)}$, also $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X)$. Damit ist $\ker\lambda=H^0(X,\mathcal{O}_X)=k$ eindimensional.

$\Rightarrow h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=\dim\ker\lambda+\operatorname{rk}\lambda\leq 1+\dim V=1+\deg D$.

② $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))\geq h^0(X,\mathcal{O}_X(D))-h^1(X,\mathcal{O}_X(D))=\chi(\mathcal{O}_X(D))\overset{RR}{=}\chi(\mathcal{O}_X)+\deg D=1-g+\deg D=1+\deg D$

③ Es ist $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\setminus H^0(X,\mathcal{O}_X)\subseteq k(X)\setminus k$, also entspricht f einem $\pi: X\to\mathbb{P}^1_k$ (siehe 1.2). Schreibe $\operatorname{div} f=D_+-D_-$ mit $D_+,D_-\geq 0$, disjunkte Träger, $\deg D_+=\deg D_-=d$ mit $d=\deg\pi$. Wegen $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ ist $0\leq\operatorname{div} f+D=D_++D-D_-$. Weil D_+ und D_- disjunkte Träger haben, ist auch $D-D_-\geq 0$, also $D_-\leq D$.

Insbesondere ist $\deg D_-\leq\deg D\overset{k\text{ alg. abg.}\Rightarrow x\ k\text{-rational}}{=}1$ und damit $d\leq 1$. Außerdem $d\geq 1$, da d ja Grad eines Kurvenmorphismus ist.

$\Rightarrow 1=d=[k(X):\underbrace{k(\mathbb{P}^1_k)}_{\text{via }\pi^\#}]\Rightarrow k(\mathbb{P}^1_k)\xrightarrow{\pi^\#}k(X)$ ist Iso $\Rightarrow X\xrightarrow{\pi}\mathbb{P}^1_k$ ist Iso.

Aufgabe 3

① $X_\mathbb{C} = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[T_0,T_1,T_2]/(T_0^2+T_1^2+T_2^2)$. Über $\mathbb{C}$ sind alle quadratischen Formen äquivalent. Insbesondere ist

$(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ äquivalent zu $(x,y,z) \mapsto xz-y^2$. Unter einer geeigneten linearen Transformation geht also $T_0^2+T_1^2+T_2^2$

auf $T_0T_2+T_1^2$. $\Rightarrow X_\mathbb{C} \cong \operatorname{Proj} \mathbb{C}[T_0,T_1,T_2]/(T_0T_2+T_1^2) = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[X^2,XY,Y^2] = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[X,Y]^{(2)} \overset{(*)}{\cong} \operatorname{Proj}\mathbb{C}[X,Y] = \mathbb{P}^1_\mathbb{C}$

nur gerade Stufen

Zu (*): Sei R ein graduierter Ring und $n \in \mathbb{N}^+$. $R^{(n)} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} R_{in}$ ist der <u>n-te Veronesering</u>. Dann ist

$\operatorname{Proj} R^{(n)} \cong \operatorname{Proj} R$.

Beweisidee: $\operatorname{Proj} R^{(n)}$ hat Basis aus den $D_+(f)$ mit $f \in R^{(n)}$ homogen. Das sind die homogenen $f \in R$ mit $n \mid \deg f$.

$\operatorname{Proj} R$ hat als Basis die $D_+(f)$ mit $f \in R$ homogen. Wegen $D_+(f) = D_+(f^n)$ reichen die f mit $n \mid \deg f$.

$D_{+,R^{(n)}}(f) \cong \operatorname{Spec} R^{(n)}_{(f)}$, $D_{+,R}(f) = \operatorname{Spec} R_{(f)}$. Rechnen zeigt $R^{(n)}_{(f)} \cong R_{(f)}$ und das verträgt sich mit

Lokalisierung. $\rightsquigarrow$ $\operatorname{Proj} R$ und $\operatorname{Proj} R^{(n)}$ gleich zusammengeklebt

② $X(\mathbb{R}) = \{\underbrace{[t_0:t_1:t_2]}_{\text{homogene Koordinaten}} : (t_0,t_1,t_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \underbrace{t_0^2+t_1^2+t_2^2}_{>0} = 0\} = \emptyset$

$\mathbb{P}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}) = \{[t_0:t_1] : (t_0,t_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \neq \emptyset$, etwa $[1:0] \in \mathbb{P}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R})$. $\Rightarrow X \not\cong \mathbb{P}^1_\mathbb{R}$

③ • geometrisch zusammenhängend: $X_\mathbb{C} \cong \mathbb{P}^1_\mathbb{C}$ ist zusammenhängend.

• Projektiv: $X = V_+(T_0^2+T_1^2+T_2^2) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_\mathbb{R}$

• Kurve: X ist projektiv, also von endlichem Typ. Die Erweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist endlich, also ganz. Nach Going-Up

ist $\dim X = \dim X_\mathbb{C} = \dim \mathbb{P}^1_\mathbb{C} = 1$.

• glatt: Teste auf Standardüberdeckung.

$D_{+,X}(T_0) = \operatorname{Spec} \left(\mathbb{R}[T_0,T_1,T_2]/(f)\right)_{(T_0)} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[1, \tfrac{T_1}{T_0}, \tfrac{T_2}{T_0}]/f(1,\tfrac{T_1}{T_0},\tfrac{T_2}{T_0}) = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1)$

Jacobi Kriterium: Jacobimatrix ist $\begin{pmatrix}2X\\2Y\end{pmatrix}$. Linksinverses dazu ist $(-\frac{1}{2}X, -\frac{1}{2}Y)$ wegen $(-\frac{1}{2}X,-\frac{1}{2}Y)\begin{pmatrix}2X\\2Y\end{pmatrix}=-X^2-Y^2=1$

$\rightsquigarrow D_{+,X}(T_0)$ glatt. $D_{+,X}(T_1)$ und $D_{+,X}(T_2)$ gehen analog mit permutierten Variablen.

$g=0$: Der Morphismus $i^\#: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to i_*\mathcal{O}_X$, der von der Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ herkommt, bildet zusammen mit

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}(-2) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$ eine Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}} \to i_*\mathcal{O}_X \to 0$. Alle Garben sind quasikohärent, also

kann man Exaktheit auf einer Überdeckung testen. Wie oben reicht $D_+(T_0)$, Rest analog. Dort wird die

Sequenz $0 \to \mathbb{R}[T_0^{\pm1}, T_1, T_2]_{-2} \xrightarrow{\cdot f} \mathbb{R}[T_0^{\pm1}, T_1, T_2]_0 \to (\mathbb{R}[T_0^{\pm1}, T_1, T_2]/(f))_0 \to 0$. Mit $X=\frac{T_1}{T_0}$, $Y=\frac{T_2}{T_0}$ teste also

Exaktheit von $0 \to T_0^{-2}\,\mathbb{R}[X,Y] \xrightarrow{\cdot T_0^2(X^2+Y^2+1)} \mathbb{R}[X,Y] \to \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1) \to 0$ oder alternativ von

$0 \to \mathbb{R}[X,Y] \xrightarrow{\cdot(X^2+Y^2+1)} \mathbb{R}[X,Y] \to \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2+1) \to 0$ und da ist alles klar.

Additivität der Eulercharakteristik: $0=\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))-\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})+\chi(i_*\mathcal{O}_X) \overset{\text{Blatt 8}}{\underset{\text{Afg 3}}{=}} \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))-\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})+\chi(\mathcal{O}_X)$.

In der Vorlesung wurde $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$ berechnet. Daraus ergibt sich $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))=\binom{n+m}{n}$. Einsetzen:

$0=\binom{0}{2}-\binom{2}{2}+(1-g(X)) = -g(X) \Rightarrow g(X)=0$.

④* A ist flach über k und $k \to \ell$ ist injektiv. Also ist auch $A = A \otimes_k k \to A \otimes_k \ell = B$ injektiv. Weil B nullteilerfrei ist, ist A es auch.

Sei $K = \operatorname{Quot} A$ und sei $\alpha \in K$ ganz über A. Analog zu $A \to B$ ist auch $K \to L := K \otimes_k \ell$ injektiv. Fasse also K als Unterring von L auf. Als Element der B-Algebra L ist ganz, denn eine Ganzheitsgleichung für α über A ist auch eine über B. Die Inklusion $A \hookrightarrow B$ induziert $\operatorname{Quot} A \hookrightarrow \operatorname{Quot} B$, insbesondere ist $\alpha \in \operatorname{Quot} B$. Weil B normal ist, ist $\alpha \in B$.

Zeige noch $B \cap K = A$ in L, dann folgt $\alpha \in A$. $\supseteq$ ist klar. Für $\subseteq$ sei $(\beta_i)_{i \in I}$ eine Basis von ℓ über k mit $* \in I$,

$\beta_* = 1$. Dann hat jedes $x \in L$ eine eindeutige Darstellung als $\sum_{i \in I} y_i \otimes \beta_i$ mit $y_i = 0$ für fast alle i. Die Elemente aus B sind dabei die mit $y_i \in A \ \forall i$, die aus K sind die mit $y_i = 0$ für $i \neq *$. Ein $z \in B \cap K$ hat also die Form $y_* \otimes 1$ mit $y_* \in A$. $\rightsquigarrow z \in A$.

Aufgabe 4

① Ein lokal freier Modul auf $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T]$ hat nach Vorlesung die Form $\tilde{P}$ mit P einem endlich-projektiven $k[T]$-Modul. Der Rang n des $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k}$-Moduls ist dabei der Rang von P. Als direkter Summand eines freien Moduls ist P torsionsfrei, nach Struktursatz ist P denn auch frei. Damit der Rang passt, muss $P \cong k[T]^n$ sein, also $\tilde{P} = \mathcal{O}^n_{\mathbb{A}^1}$.

② Sei $M \in GL_n(k[T^{\pm 1}])$. Definiere folgendermaßen eine lokalfreie Garbe $\mathcal{E}_M$ von Rang n auf $\mathbb{P}^1_k$: Schreibe $\mathbb{P}^1_k = U_0 \cup U_1$ mit $\mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[T_0, T_1]$, $U_0 = D_+(T_0)$, $U_1 = D_+(T_1)$, $T \mathrel{\hat{=}} \frac{T_1}{T_0}$. Auf U_i ist $\mathcal{O}^n_{U_i}$ lokal frei von Rang n. Auf $U_{01} = U_0 \cap U_1$ verklebe entlang des Isomorphismus

$$\mathcal{O}^n_{U_1}|_{U_{01}} = \mathcal{O}^n_{U_{01}} = \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} \xrightarrow[\sim]{M\cdot} \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} = \mathcal{O}^n_{U_{01}} = \mathcal{O}^n_{U_0}|_{U_{01}}$$

Vektorbündel von Rang n

Das Resultat sei $\mathcal{E}_M$. Behauptung: $M \mapsto \mathcal{E}_M$ induziert eine Bijektion $GL_n(k[T]) \backslash GL_n(k[T^{\pm 1}]) / GL_n(k[T^{-1}]) \xrightarrow{\sim} VB_n(\mathbb{P}^1_k)/\cong$

Wohldefiniertheit: Seien $M, N \in GL_n(k[T^{\pm 1}])$, $N = UMV$ mit $U \in GL_n(k[T])$, $V \in GL_n(k[T^{-1}])$. Zeige $\mathcal{E}_M \cong \mathcal{E}_N$.

Das Paar $\left(\mathcal{O}^n_{U_0} = \widetilde{k[T]^n} \xrightarrow[\sim]{U} \widetilde{k[T]^n} = \mathcal{O}^n_{U_0},\ \mathcal{O}^n_{U_1} = \widetilde{k[T^{-1}]^n} \xrightarrow[\sim]{V^{-1}} \widetilde{k[T^{-1}]^n} = \mathcal{O}^n_{U_1}\right)$ ist ein Isomorphismus von Klebedaten, denn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^n_{U_1}|_{U_{01}} = \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} \arrow[r, "M", "\sim"'] \arrow[d, "V^{-1}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} = \mathcal{O}^n_{U_0}|_{U_{01}} \arrow[d, "U", "\sim"'] \\
\mathcal{O}^n_{U_1}|_{U_{01}} = \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} \arrow[r, "N = UMV", "\sim"'] & \widetilde{k[T^{\pm 1}]^n} = \mathcal{O}^n_{U_0}|_{U_{01}}
\end{tikzcd}$$

Es verklebt also zu einem Isomorphismus $\mathcal{E}_M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_N$.

Injektivität: Seien $M, N \in GL_n(k[T^{\pm 1}])$ mit $\mathcal{E}_M \cong \mathcal{E}_N$. Ein Isomorphismus $\mathcal{E}_M \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_N$ liefert einen Isomorphismus

($f: \mathcal{E}_M|_{U_0} = \mathcal{O}^n_{U_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{U_0} = \mathcal{E}_N|_{U_0}$, $g: \mathcal{E}_M|_{U_1} = \mathcal{O}^n_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{U_1} = \mathcal{E}_N|_{U_1}$). Auf U_{01} muss dabei das passende

Diagramm kommutieren, also $N \circ g = f \circ M$.

$f \in \mathrm{Aut}_{Sh(U_0)} \mathcal{O}^n_{U_0} = \mathrm{Aut}_{Sh(U_0)}\left(\widetilde{K[T]^n}\right) \cong \mathrm{Aut}_{K[T]}(K[T]^n) = GL_n(K[T])$, deshalb entspricht f einer Matrix $U \in GL_n(K[T])$.

Analog wird g zu einer Matrix $V \in GL_n(K[T^{-1}])$ und es gilt $NV = UM \Rightarrow N = UMV^{-1} \sim M$.

Surjektivität: Sei $F \in VB_n(\mathbb{P}^1_K)$. Nach ① gibt es Isomorphismen $\varphi_0: F|_{U_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{U_0}$ und $\varphi_1: F|_{U_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^n_{U_1}$.

Sei ψ die Komposition $\mathcal{O}^n_{U_{01}} \xrightarrow[\sim]{\varphi_1^{-1}|_{U_{01}}} F|_{U_{01}} \xrightarrow[\sim]{\varphi_0|_{U_{01}}} \mathcal{O}^n_{U_{01}}$. Wie oben entspricht ψ einer Matrix $M \in GL_n(K[T^{\pm 1}])$.

Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
F|_{U_{01}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_1|_{U_{01}}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F|_{U_{01}} \arrow[d, "\varphi_0|_{U_{01}}", "\sim"'] \\
\mathcal{O}^n_{U_{01}} \arrow[r, "\sim", "M"'] & \mathcal{O}^n_{U_{01}}
\end{tikzcd}$$

Das bedeutet, dass $(\varphi_0, \varphi_1): (F|_{U_0}, F|_{U_1}, F|_{U_{01}} = F|_{U_{01}}) \to (\mathcal{O}^n_{U_0}, \mathcal{O}^n_{U_1}, \mathcal{O}^n_{U_{01}} \xrightarrow{M} \mathcal{O}^n_{U_{01}})$ ein Isomorphismus von

Klebedaten ist. Er liefert einen Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_M$.

③ Aus Hazewinkel, Michiel: A short elementary proof of Grothendieck's theorem on algebraic vector bundles over the projective line.

Nenne $M, N \in GL_n(K[T^{\pm 1}])$ äquivalent, wenn $GL_n(K[T]) \cdot M \cdot GL_n(K[T^{-1}]) = GL_n(K[T]) \cdot N \cdot GL_n(K[T^{-1}])$.

<u>Satz (Birkhoff, 1909)</u> Jedes M ist äquivalent zu einem eindeutigen $\mathrm{diag}(T^{d_i})_{1 \le i \le n}$ mit $d_1 \ge \dots \ge d_n$.

<u>Bew</u>: Existenz

Sei zunächst $M \in GL_n(K[T^{\pm 1}]) \cap M_n(K[T])$. Induktion nach n. Für $n=1$ ist M ein Polynom f, das in

$K[T^{\pm 1}]$ invertierbar ist. $\Rightarrow f = aT^d$ mit $a \in K^\times = K[T]^\times$ $\Rightarrow f \sim T^d$.

Sei jetzt $n > 1$. Sei g der normierte ggT der ersten Spalte von M.

$\Rightarrow g \mid \det M \in K[T^{\pm}]^\times \Rightarrow g \in K[T^{\pm 1}]^\times = \{aT^r : a \in K^\times, r \in \mathbb{Z}\}$, also $g = T^r$. Definiere $r(M)$ als dieses r.

Unter allen Matrizen in $GL_n(K[T^\pm]) \cap M_n(K[T])$, die zu M äquivalent sind, wähle ein $\hat{M}$ mit $r(\hat{M})$ maximal. Ein Maximum existiert hier, denn $T^r \mid \det M$ und Äquivalenzumformungen ändern die Determinante nur um Einheiten aus K. r ist somit durch die T-adische Bewertung von $\det M$ beschränkt.

Sei $d_1 := r(\hat{M})$.

Als ein ggT der ersten Spalte kann man durch invertierbare Zeilenoperationen über $K[T]$ aus $\hat{M}$ eine Matrix M' machen mit T^{d_1} in der linken oberen Ecke. Räume damit den Rest der Spalte leer.

$$M \sim \hat{M} \sim M' = \begin{pmatrix} T^{d_1} & \\ T^{d_1}\cdot * & * \end{pmatrix} \sim M'' = \begin{pmatrix} T^{d_1} & * \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

Sei N der $(n-1)\times(n-1)$-Minor ganz unten rechts von M''. Nach Induktion ist $N \sim N'$ mit N' in der gewünschten Form. Dann $M \sim M''' = \begin{pmatrix} T^{d_1} & * \\ 0 & N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{d_1} & f_2 & \cdots & f_n \\ & T^{d_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & T^{d_n} \end{pmatrix}$ mit $d_2 \geq \dots \geq d_n$

Beh: $d_1 \geq d_2$. Angenommen, $d_2 > d_1$. Nutze eine invertierbare $K[T^\pm]$-Spaltenoperation, um mithilfe der ersten Spalte alle Monome vom Grad $\leq d_1$ in f_2 zu entfernen.

$$\rightsquigarrow M \sim \begin{pmatrix} T^{d_1} & \overbrace{\tilde{f}_2}^{=T^{d_1+1}\cdot g_2} & f_3 & \cdots & f_n \\ & T^{d_2} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & T^{d_n} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} T^{d_1+1}\cdot g_2 & T^{d_1} & f_3 & \cdots & f_n \\ T^{d_2} & & & 0 & \\ & & T^{d_3} & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & T^{d_n} \end{pmatrix} =: \tilde{M}.$$

Dann ist $r(\tilde{M}) \geq d_1 + 1 > d_1 = r(\hat{M})$. Widerspruch zur Wahl von $\hat{M}$! Also $d_1 \geq d_2$.

In M''' nutze nun Zeilenoperationen über $K[T]$, um die Grade der f_i auf $< d_i$ zu reduzieren, insbesondere auf $< d_1$. Dann nutze die erste Spalte und $K[T^\pm]$-Spaltenoperationen um sie ganz zu entfernen.

$$\rightsquigarrow M \sim \begin{pmatrix} T^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & T^{d_n} \end{pmatrix}$$

Sei nun $M\in GL_n(k[T^{\pm 1}])$ beliebig. Für $N\gg 0$ ist $T^N M\in GL_n(k[T^{\pm1}])\cap M_n(k[T])$, also $T^N M\sim \mathrm{diag}(T^{d_i})_{1\le i\le n}$ nach oben. $\Rightarrow M\sim\mathrm{diag}(T^{d_i-N})_{1\le i\le n}$.

Eindeutigkeit

Seien $D=\mathrm{diag}(T^{d_i})_{1\le i\le n}$ und $D'=\mathrm{diag}(T^{d_i'})_{1\le i\le n}$ mit $d_1\ge\dots\ge d_n$ und $d_1'\ge\dots\ge d_n'$. Sei außerdem $D\sim D'$, also $UD=D'V$ mit $U\in GL_n(k[T])$, $V\in GL_n(k[T^{-1}])$. Auf dem äußeren Produkt $\Lambda^r(k[T^{\pm1}]^n)$ ist nun $\Lambda^r U\circ\Lambda^r D=\Lambda^r D'\circ\Lambda^r V$. Für ein $I\subseteq\{1,\dots,n\}$, $I=\{i_1<i_2<\dots<i_r\}$ sei $e_I:=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$, wobei $e_1,\dots,e_n$ die Standardbasis von $k[T^{\pm1}]^n$ ist.

Sei $I:=\{1,\dots,r\}$ und $J\subseteq\{1,\dots,n\}$ mit $\#J=r$ zunächst beliebig.

Element der Dualbasis

$$(e_J^\vee\circ\Lambda^r U\circ\Lambda^r D)(e_I)=(e_J^\vee\circ\Lambda^r D'\circ\Lambda^r V)(e_I)$$

$$\underbrace{e_J^\vee(\Lambda^r U(e_I))}_{u_J}\cdot\prod_{i\in I}T^{d_i} = \prod_{j\in J}T^{d_j'}\cdot\underbrace{e_J^\vee(\Lambda^r V(e_I))}_{v_J}$$

u_J ist ein Element aus $k[T]$, denn $\Lambda^r U$ schickt $\Lambda^r(k[T]^n)$ nach $\Lambda^r(k[T]^n)$. Mit U ist auch $\Lambda^r U$ bijektiv. Insbesondere ist $\Lambda^r U(e_I)\neq 0$. Es gibt also ein J mit $u_J\neq 0$. Dann ist auch $v_J\neq 0$ und analog zu oben ist $v_J\in k[T^{-1}]$.

$$u_J\cdot T^{\sum_{i=1}^r d_i}=v_J\cdot T^{\sum_{j\in J}d_j'}\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^r d_i\le\sum_{j\in J}d_j'\le\sum_{j=1}^r d_j'.$$

Das gleiche Argument für die Gleichung $U^{-1}D'=DV^{-1}$ gibt $\sum_{j=1}^r d_j'\le\sum_{i=1}^r d_i$. Damit ist $\sum_{i=1}^r d_i=\sum_{i=1}^r d_i'$ für alle $1\le r\le n$, also $d_i=d_i'$ für alle i.

④ Aus ② und ③ folgt, dass ein $\mathcal{F}\in VB_n(\mathbb{P}^1_k)$ isomorph ist zu einem eindeutigen $\mathcal{E}_D$ mit $D=\mathrm{diag}(T^{d_i})_{1\le i\le n}$,

$d_1 \geq \ldots \geq d_n$. $\mathcal{E}_D$ entspricht dem Klebedatum $(\mathcal{O}_{U_0}^n, \mathcal{O}_{U_1}^n, \mathcal{O}_{U_{01}}^n \xrightarrow[\sim]{D} \mathcal{O}_{U_{01}}^n) = \bigoplus_{i=1}^n (\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_{U_{01}} \xrightarrow[\sim]{T^{d_i}} \mathcal{O}_{U_{01}})$.

Damit ist $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}_D \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}_{T^{d_i}}$. Zeige nun noch $\mathcal{E}_{T^{d_i}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-d_i)$.

Es ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-d) = \widetilde{k[T_0, T_1](-d)}$ und damit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-d)|_{U_0} = \widetilde{(k[T_0, T_1](-d))_{(T_0)}} = \widetilde{(k[T_0, T_1]_{T_0})_{-d}} = \widetilde{T_0^{-d} k[\tfrac{T_1}{T_0}]} = \widetilde{T_0^{-d} k[T]}$

Analog $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k}(-d)|_{U_1} = \widetilde{T_1^{-d} k[T^{-1}]}$. Die Identifizierung auf U_{01} ist gegeben durch $T_1^{-d} k[T^{\pm 1}] \xrightarrow[\sim]{\cdot T^d} T_0^{-d} k[T^{\pm 1}]$.

So sehen gerade die Klebedaten für $\mathcal{E}_{T^d}$ aus, also $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-d) \cong \mathcal{E}_{T^d}$.

$\Rightarrow \mathcal{F} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-d_i)$