Blatt 12

Aufgabe 1

Konstruiere eine Garbenabbildung $i : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}$ folgendermaßen: Auf $D_+(g) \cong \operatorname{Spec} R_{(g)}$ sei i gegeben durch

$i_{D_+(g)} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-d)(D_+(g)) = (R_g)_{-d} \xrightarrow{\cdot f} (R_g)_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(D_+(g))$. Das verträgt sich offensichtlich mit Restriktion. Weil alle $i_{D_+(g)}$ injektiv

sind, ist i injektiv. Der Prägarbenkokern $\mathcal{C}$ ist gegeben durch $\mathcal{C}(D_+(g)) = \operatorname{coker}((R_g)_{-d} \xrightarrow{\cdot f} (R_g)_0) = (R_g / f R_g)_0 = (R/f)_{(\bar{g})}$.

Sei $\iota : X = V_+(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$ die Einbettung. Dann ist $(\iota_* \mathcal{O}_X)(D_+(g)) = \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} R/f}(D_+(\bar{g})) = (R/f)_{(\bar{g})}$. Die Prägarbe $\mathcal{C}$ und die Garbe $\iota_* \mathcal{O}_X$

sind also auf einer Basis gleich (die Restriktionen sind bei beiden die offensichtlichen). Also ist $\iota_* \mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\# = \operatorname{coker} i$.

Das gibt eine exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k} \to \iota_* \mathcal{O}_X \to 0$.

$$\Rightarrow 0 = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(-d)) - \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}) + \chi(\iota_* \mathcal{O}_X) \overset{H(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \text{ ist bekannt}}{\underset{\text{Blatt 8 Aufg 3}}{=}} \binom{2-d}{2} - \binom{2}{2} + \chi(\mathcal{O}_X) = \frac{(2-d)(1-d)}{2} - 1 + (1 - g(X)) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g(X)$$

$$\Rightarrow g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Aufgabe 2

$X = \mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj} R[T_0, T_1]$, $T := \frac{T_1}{T_0}$. $\quad U_0 = D_+(T_0) = \operatorname{Spec} R[T]$, $U_1 = D_+(T_1) = \operatorname{Spec} R[T^{-1}]$

$\Omega_{X/R}|_{U_0} = \Omega_{U_0/R} = \widetilde{\Omega_{R[T]/R}} = \widetilde{dT \cdot R[T]} = dT \cdot \mathcal{O}_{U_0}$ $\qquad$ $\Omega_{X/R}|_{U_1} = \Omega_{U_1/R} = \widetilde{\Omega_{R[T^{-1}]/R}} = \widetilde{dT^{-1} \cdot R[T^{-1}]} = dT^{-1} \cdot \mathcal{O}_{U_1}$

Auf $U_0 \cap U_1$ gilt:

$$0 = d1 = d(T \cdot T^{-1}) = (dT)\, T^{-1} + T \cdot d(T^{-1}) \Rightarrow d(T^{-1}) = -T^{-2} \cdot dT.$$

Damit ist $\Omega_{X/R}$ durch die Klebedaten $(dT \cdot \mathcal{O}_{U_0}, dT^{-1}\mathcal{O}_{U_1}, dT \cdot \mathcal{O}_{U_{01}} \xrightarrow[\sim]{\cdot(-T^{-2})} dT^{-1} \cdot \mathcal{O}_{U_{01}})$ beschrieben. Diese sind isomorph zu den Klebedaten $(\mathcal{O}_{U_0}, \mathcal{O}_{U_1}, \mathcal{O}_{U_{01}} \xrightarrow[\sim]{\cdot T^{-2}} \mathcal{O}_{U_{01}})$ von $\mathcal{O}_X(-2)$ isomorph. Also $\Omega_{X/R} \cong \mathcal{O}_X(-2)$.

Aufgabe 3

① Wegen $X(k) \neq \emptyset$ gibt es einen effektiven Divisor D mit $\deg D = g+1$. Zum Beispiel wähle $D = (g+1)\cdot x$ mit x einem k-rationalen Punkt.

Es ist $H^0(X, \mathcal{O}_X) \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ mit $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \overset{RR}{=} h^1(X, \mathcal{O}_X(D)) + \deg D + 1 - g \geq 0 + (g+1) + 1 - g = 2 > h^0(X, \mathcal{O}_X)$, also $H^0(X,\mathcal{O}_X) \subsetneq H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Wähle $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Nach Blatt 11, Aufgabe 1 entspricht f einem Morphismus $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ von Grad d, wobei $\operatorname{div} f = D_+ - D_-$ mit D_+, D_- effektiv von Grad d mit disjunkten Trägern.

$f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \Rightarrow 0 \leq \operatorname{div} f + D = D_+ + D - D_- \underset{\text{disj. Tr.}}{\overset{D_+, D_-}{\Longrightarrow}} D - D_- \leq 0 \Rightarrow D_- \leq D \Rightarrow d = \deg D_- \leq \deg D = g+1.$

② Sei zunächst $r = 1$ und $P = P_1$. Für $n \gg 0$ ist $\deg(K - nP) = \deg K - n\cdot \deg P < 0$, also $H^0(X, \mathcal{O}_X(K - nP)) = 0$ (siehe Blatt 3, Aufgabe 4). Dann ist $h^0(X, \mathcal{O}_X(nP)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(K - nP)) + \deg(nP) + 1 - g = n \cdot \deg P + 1 - g > 1$ für $n \gg 0$. Damit ist $h^0(X, \mathcal{O}_X(nP)) > h^0(X, \mathcal{O}_X)$ für genügend große n und somit $H^0(X, \mathcal{O}_X(nP)) \setminus H^0(X, \mathcal{O}_X) \neq \emptyset$. Wähle ein f daraus. Wegen $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nP))$ ist $\operatorname{div} f + nP \geq 0$, also $\operatorname{div} f|_{X \setminus \{P\}} \geq 0$. Das bedeutet, dass f außerhalb von P regulär ist. An P muss f eine Polstelle haben, sonst wäre ja f regulär auf ganz X, also $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$.

Wenn r beliebig ist, konstruiere für jedes $1 \leq i \leq r$ ein f_i, dass an P_i eine Polstelle hat und ansonsten regulär ist. Dann ist $\sum_{i=1}^{r} f_i$ regulär an jedem $Q \notin \{P_1, \dots, P_r\}$ und hat an jedem P_i eine Polstelle.

③ Sei $D := \sum_{i=1}^{r} P_i$ und $d := \deg D \geq 2g$. Es ist $\deg(K - D) = 2g - 2 - d \leq -2 < 0$, also $h^0(X, \mathcal{O}_X(K - D)) = 0$.

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \overset{RR}{=} h^0(X, \mathcal{O}_X(K-D)) + \deg D + 1 - g = d - g + 1.$$

Nun betrachte die Divisoren $D - P_i$. Wenn $\deg(K - D + P_i) < 0$, dann ist $h^0(X, \mathcal{O}_X(K - D + P_i)) = 0$.

$$\Rightarrow h^0(X, \mathcal{O}_X(D - P_i)) \overset{RR}{=} h^0(X, \mathcal{O}_X(K - D + P_i)) + \deg(D - P_i) + 1 - g = d - g + 1 - \deg P_i < h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

Ausonsten ist $\deg(K-D+P_i)\geq 0$. Nach ④ ist $h^0(X,\mathcal{O}_X(K-D+P_i)) \leq 1+\deg(K-D+P_i)$.

$$\Rightarrow h^0(X,\mathcal{O}_X(D-P_i)) \overset{RR}{=} h^0(X,\mathcal{O}_X(K-D+P_i))+\deg(D-P_i)+1-g \leq 1+\deg(K-D+P_i)+\deg(D-P_i)+1-g = \deg K+2-g = g \leq d \cdot g < h^0(X,\mathcal{O}_X(D))$$

Damit sind die $H^0(X,\mathcal{O}_X(D-P_i))$ Unterräume von $H^0(X,\mathcal{O}_X(X))$ von niederer Dimension. Weil k ein unendlicher Körper ist, können die $H^0(X,\mathcal{O}_X(D-P_i))$ nicht den ganzen Raum $H^0(X,\mathcal{O}_X(X))$ überdecken. Also gibt es ein $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$ mit $f\notin H^0(X,\mathcal{O}_X(D-P_i))$ für alle i. Dieses f tuts.

④ Für $\deg D=-1$ ist $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=0=1+\deg D$.

Sei nun $\deg D\geq 0$. Wenn $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=0$, dann ist alles klar. Ansonsten wähle $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\setminus\{0\}$. Nach Definition von $\mathcal{O}_X(D)$ ist $0\leq \operatorname{div} f+D=:D'$. Insbesondere ist $D\sim D'$.

$$h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) = h^0(X,\mathcal{O}_X(D')) \overset{\text{Blatt 11}}{\underset{\text{Aufg. 2}}{\leq}} 1+\deg D' = 1+\deg D+\deg \operatorname{div} f = 1+\deg D$$

⑤ Sei zunächst $\deg D=0$, zeige $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=\deg D+1=1 \Leftrightarrow D\sim 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=1$. Dann existiert $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\setminus\{0\}$, also $f\in K(X)\setminus\{0\}$ mit $\operatorname{div} f+D\geq 0$. Außerdem ist $\deg(\operatorname{div} f+D)=0+0=0$

$$\Rightarrow \operatorname{div} f+D=0 \Rightarrow D=\operatorname{div} f^{-1}\sim 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Wenn $D\sim 0$, dann ist $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=h^0(X,\mathcal{O}_X)=1$.

Nun sei $\deg D>0$, zeige $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=1+\deg D \Leftrightarrow g(X)=0$. Nehme zuerst an, dass k algebraisch abgeschlossen ist ($X(k)\neq\emptyset$ reicht auch)

$\boxed{\Leftarrow}$ Nach Blatt 11, Aufgabe 2 ist $X\cong\mathbb{P}^1_k$. $\Rightarrow h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=h^0(\mathbb{P}^1_k,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(\deg D))\overset{VL}{=}1+\deg D$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $P\in X$ ein abgeschlossener Punkt. $\rightsquigarrow \deg P=1$ als Divisor.

Für jeden Divisor E auf X gibt es wie im Beweis von Riemann-Roch eine kurze exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{O}_X(E-P)\to\mathcal{O}_X(E)\to i_*\mathcal{O}_k\to 0, \qquad i:\operatorname{Spec} k\to X \text{ Inklusion des Punktes } P.$$

Globale Schnitte nehmen zeigt, dass $0\to H^0(X,\mathcal{O}_X(E-P))\to H^0(X,\mathcal{O}_X(E))\to k$ exakt ist. Also $h^0(X,\mathcal{O}_X(E))-h^0(X,\mathcal{O}_X(E-P))\in\{0,1\}$,

insbesondere $h^0(X,\mathcal{O}_X(E))\le h^0(X,\mathcal{O}_X(E-P))+1$. Sei $d:=\deg D>0$. Dann gilt:

$$d+1 = h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) \le h^0(X,\mathcal{O}_X(D-P))+1 \le \dots \le h^0(X,\mathcal{O}_X(\underbrace{D-dP}_{\deg=0}))+d \overset{①}{\le} 1+d$$

Also gilt in der Ungleichungskette überall $=$. Vor allem ist $h^0(X,\mathcal{O}_X(D-(d-1)P))+d-1=d+1$. Für $D'=D-(d-1)P$ ist also

$h^0(X,\mathcal{O}_X(D'))=2$ und $\deg D'=1$. Zeige damit wie üblich, dass $X\cong\mathbb{P}^1_k$ gilt:

Wegen $h^0(X,\mathcal{O}_X(D'))>0$ existiert ein $f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D'))\setminus\{0\}$. Dann ist $D'':=\operatorname{div} f+D'\ge 0$ nach Definition von $\mathcal{O}_X(D')$.

Außerdem ist $D''\sim D'$, also $\deg D''=\deg D'=1$ und $h^0(X,\mathcal{O}_X(D''))=h^0(X,\mathcal{O}_X(D'))=2$. Nun gibt es $h\in H^0(X,\mathcal{O}_X(D''))\setminus H^0(X,\mathcal{O}_X)$.

Nach Blatt 11, Aufgabe 1 definiert h einen Morphismus $X\to\mathbb{P}^1_k$ vom Grad e, wobei $e=\deg D_+=\deg D_-$ für $\operatorname{div} h=D_+-D_-$,

D_+,D_- effektiv, disjunkte Träger. $0\le \operatorname{div}h+D''=D_+-D_-+D'' \overset{\text{disj.}}{\underset{\text{Tr.}}{\Rightarrow}} D_-\le D'' \overset{\deg}{\Rightarrow} e\le 1$.

Also ist $e=1$, $X\cong\mathbb{P}^1_k$ und $g(X)=g(\mathbb{P}^1_k)=0$.

Zeige jetzt $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=d+1 \Leftrightarrow g(X)=0$ auch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Sei $\bar k$ ein algebraischer Abschluss. Dann ist

$X_{\bar k}$ eine glatte, projektive, (geometrisch) zusammenhängende Kurve über $\bar k$. $\alpha:\operatorname{Spec}\bar k\to\operatorname{Spec}k$ ist flach und $f:X\to\operatorname{Spec}k$

ist separiert und quasikompakt. Nach flachem Basiswechsel (Blatt 10, Aufgabe 3) gilt für jede quasikohärente

$$\begin{tikzcd} X_{\bar k} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\bar f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}\bar k \arrow[r, "\alpha"'] & \operatorname{Spec}k \end{tikzcd}$$

Garbe $\mathcal{F}$ auf X: $\widetilde{H^i(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{F})} = R^i\bar f_*\beta^*\mathcal{F}=\alpha^*R^if_*\mathcal{F}=\widetilde{H^i(X,\mathcal{F})\otimes_k\bar k} \Rightarrow H^i(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{F})=H^i(X,\mathcal{F})\otimes_k\bar k \Rightarrow h^i(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{F})=h^i(X,\mathcal{F})$.

Insbesondere: $g(X)=h^1(X,\mathcal{O}_X)=h^1(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{O}_X)=h^1(X_{\bar k},\mathcal{O}_{X_{\bar k}})=g(X_{\bar k})$, $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=h^0(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{O}_X(D))$, $h^1(X,\mathcal{O}_X(D))=h^1(X_{\bar k},\beta^*\mathcal{O}_X(D))$

$\beta^*\mathcal{O}_X(D)$ ist eine invertierbare Garbe auf $X_{\bar k}$, also von der Form $\mathcal{O}_{X_{\bar k}}(\bar D)$ für einen Divisor $\bar D$ auf $X_{\bar k}$. Mit Riemann-Roch gilt:

$$\deg\bar D \overset{RR}{=} g(X_{\bar k})-1+h^0(X_{\bar k},\mathcal{O}_{X_{\bar k}}(\bar D))-h^1(X_{\bar k},\mathcal{O}_{X_{\bar k}}(\bar D)) = g(X)-1+h^0(X,\mathcal{O}_X(D))-h^1(X,\mathcal{O}_X(D))\overset{RR}{=}\deg D \quad (>0).$$

Also gilt $h^0(X,\mathcal{O}_X(D))=1+\deg D \Leftrightarrow h^0(X_{\bar k},\mathcal{O}_{X_{\bar k}}(\bar D))=1+\deg\bar D \overset{\text{Fall für alg. abg.}}{\underset{\text{Körper}}{\Leftrightarrow}} g(X_{\bar k})=0\Leftrightarrow g(X)=0$.

Aufgabe 4

① Die $T_i : \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X$ konstruiert man genauso wie i in Aufgabe 1. Jetzt konstruiere die h_i.

Auf $R[T_0, \dots, T_n]$ gibt es die R-lineare Derivation $\partial_i : R[T_0,\dots,T_n] \to R[T_0,\dots,T_n]$. Mit $A_j := R[T_0,\dots,T_n]_{T_j}$ setzt sich ∂_i fort zu einer Derivation $\partial_i^{(j)} : A_j \to A_j$. Sie schickt homogene rationale Funktionen wieder auf homogene, deren Grad dann um 1 kleiner ist. Also schränkt sich $\partial_i^{(j)}$ ein zu einer Derivation $\partial_i^{(j)} : (A_j)_0 \to (A_j)_{-1}$. Sie liefert eine A_j-lineare Abbildung $h_{ij} : \Omega_{(A_j)_0/R} \to (A_j)_{-1}$.

$$\Omega_{X/R}\big|_{D_+(T_j)} = \Omega_{D_+(T_j)/R} = \widetilde{\Omega_{R[T_0,\dots,T_n]_{(T_j)}/R}} = \widetilde{\Omega_{(A_j)_0/R}}\,, \qquad \mathcal{O}_X(-1)\big|_{D_+(T_j)} = \widetilde{\left(R[T_0,\dots,T_n](-1)\right)_{(T_j)}} = \widetilde{(A_j)_{-1}}\,.$$

Also bekommen wir ein $h_{ij} : \Omega_{X/R}\big|_{D_+(T_j)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)\big|_{D_+(T_j)}$. Zeige, dass diese sich zu einem $h_i : \Omega_{X/R} \to \mathcal{O}_X(-1)$ verkleben.

Betrachte dazu h_{ij} und $h_{ij'}$ auf $D_+(T_j) \cap D_+(T_{j'}) = D_+(T_j T_{j'})$ für $j \neq j'$. Auf $D_+(T_j) \cong \operatorname{Spec}(A_j)_0 = \operatorname{Spec} R\left[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \widehat{\frac{T_j}{T_j}}, \dots, \frac{T_n}{T_j}\right]$ eingeschränkt wird $\Omega_{X/R}$ frei mit Basis $\left(d\frac{T_k}{T_j}\right)_{k\neq j}$, also ist auch $\Omega_{D_+(T_jT_{j'})/R}$ frei mit den gleichen Basiselementen. Vergleiche h_{ij} und $h_{ij'}$ nun auf der Basis.

$$h_{ij}\left(d\frac{T_k}{T_j}\right) = \partial_i^{(j)}\left(\frac{T_k}{T_j}\right) = \frac{\partial_i^{(j)}T_k \cdot T_j - T_k \cdot \partial_i^{(j)} T_j}{T_j^2} = \frac{\partial_i^{(j')}T_k \cdot T_j - T_k \partial_i^{(j')} T_j}{T_j^2} = \partial_i^{(j')}\left(\frac{T_k}{T_j}\right) = h_{ij'}\left(d\frac{T_k}{T_j}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Die h_{ij} verkleben sich zu einem $h_i : \Omega_{X/R} \to \mathcal{O}_X(-1)$.

Jetzt zur exakten Sequenz. Weil alle beteiligten Garben quasikohärent sind, muss man nur die Exaktheit für Schnitte bezüglich einer affin-offenen Überdeckung zeigen, etwa die Standardüberdeckung.

$$\Omega_{X/R}(D_+(T_i)) = \Omega_{X/R}(\operatorname{Spec}(A_i)_0) = \Omega_{(A_i)_0/R} = \Big\langle d\overset{X_j^{(i)}}{\underbrace{\tfrac{T_j}{T_i}}_{\text{Basis für }\Omega}} : j \neq i \Big\rangle_{(A_i)_0} = \langle dX_j^{(i)} : j \neq i \rangle$$

$$\mathcal{O}_X(-1)^{n+1}(D_+(T_i)) = (A_i)_{-1}^{n+1} = T_i^{-1} \cdot (A_i)_0^{n+1} = \langle \underbrace{T_i^{-1} \cdot e_j}_{\text{Basis}} : 0 \leq j \leq n \rangle_{(A_i)_0}$$

$$\mathcal{O}_X(D_+(T_i)) = (A_i)_0$$

$$h_k(dX_j^{(i)}) = \partial_k^{(i)}\left(\frac{T_j}{T_i}\right) = \begin{cases} T_i^{-1} & k = j \\ -T_j T_i^{-2} & k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \Rightarrow h(dX_j^{(i)}) = \sum_k h_k(dX_j^{(i)}) e_k = T_i^{-1} e_j - T_i^{-1} X_j^{(i)} e_i$$

$$g(T_i^{-1} e_j) = T_i^{-1} T_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ X_j^{(i)} & i \neq j \end{cases}$$

Das ergibt die Sequenz $0 \to \langle dX_j^{(i)} : j \neq i \rangle \longrightarrow \langle T_i^{-1} e_j \rangle \longrightarrow (A_i)_0 \to 0$ von freien $A := (A_i)_0$-Moduln. Anders geschrieben:

$$0 \to A^n \longrightarrow A^{n+1} \longrightarrow A \to 0$$

$$f_j \longmapsto e_j - X_j^{(i)} e_i \quad (j \neq i)$$

$$e_i \longmapsto 1$$

$$e_j \longmapsto X_j^{(i)} \quad (j \neq i)$$

Hier sieht man Exaktheit direkt ein.

② Wegen ① ist $\det\left(\mathcal{O}_X(-1)^{n+1}\right) = \det \Omega_{X/\mathbb{R}} \otimes \det \mathcal{O}_X = \omega_{X/\mathbb{R}} \otimes \mathcal{O}_X = \omega_{X/\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \omega_{X/\mathbb{R}} = \det\left(\mathcal{O}_X(-1)^{n+1}\right) = \mathcal{O}_X(-1)^{\otimes(n+1)} = \mathcal{O}_X(-n-1)$$