Blatt 13

Aufgabe 1

Sei $n := \deg f$ und $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt. Nach Blatt 11, Aufgabe 1 ist $f^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) = \operatorname{Spec} A$, wobei A eine n-dimensionale $\kappa(y)$-Algebra ist. Insbesondere ist A artinsch, also:

$$\operatorname{Spec} A \cong \operatorname{Spec}\Big(\prod_{x \in f^{-1}(y)} A_x\Big) = \coprod_{f(x)=y} \operatorname{Spec} A_x = \coprod_{f(x)=y} \Big(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \times_X \big(X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)\big)\Big) = \coprod_{f(x)=y} \Big(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)\Big) = \operatorname{Spec} \prod_{f(x)=y} \big(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)\big)$$

Uniformisator in $\mathcal{O}_{Y,y}$

$$\Rightarrow A \cong \prod_{f(x)=y} \big(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)\big) = \prod_{f(x)=y} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \big(\mathcal{O}_{Y,y}/(\pi_y)\big) = \prod_{f(x)=y} \mathcal{O}_{X,x}/\big(f^\#(\pi_y)\big)$$

$$\Rightarrow n \cdot \deg y = \dim_{\kappa(y)} A \cdot \dim_k \kappa(y) = \dim_k A = \sum_{f(x)=y} \dim_k \Big(\mathcal{O}_{X,x}/\big(f^\#(\pi_y)\big)\Big) = \sum_{f(x)=y} v_x\big(f^\#(\pi_y)\big) \cdot \dim_k \kappa(x) = \sum_{f(x)=y} e_{x|y} \cdot \deg x = \sum_{\substack{x \in X \\ \text{abg.}}} n_x(f^* y) \cdot \deg x = \deg(f^* y)$$

Für beliebiges $D = \sum_y n_y \cdot y$ auf Y ist nun $\deg(f^* D) = \deg\big(\sum_y n_y f^* y\big) = \sum_y n_y \cdot \deg f^* y = \sum_y n_y \cdot n \cdot \deg y = n \cdot \deg\big(\sum_y n_y \cdot y\big) = n \cdot \deg D$

Aufgabe 2

① f liefert eine endliche Körpererweiterung $K(X)/K(Y)$. Sei $E \subseteq K(X)$ der relative separable Abschluss von $K(Y)$. Dann ist $E/K(Y)$ separabel und $K(X)/E$ rein inseparabel. Offensichtlich ist E über k endlich erzeugt und separabel vom Transzendenzgrad 1 und k ist in E relativ algebraisch abgeschlossen. Nach Vorlesung korrespondiert zu E eine Kurve $\tilde{X}$. Der Körperturm $K(X)/E/K(Y)$ entspricht einer Faktorisierung von f als $X \xrightarrow{\varphi} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} Y$. Dabei ist $\tilde{f}$ separabel und φ rein inseparabel.

Nach Hurwitzformel für $\tilde{f}$ ist $2g(\tilde{X}) - 2 = \deg \tilde{f} \cdot (2g(Y) - 2) + \deg R \geq 2g(Y) - 2 \Rightarrow g(\tilde{X}) \geq g(Y)$.

Weil φ rein inseparabel ist, ist nach Vorlesung $g(X) = g(\tilde{X})$. Zusammen ergibt das $g(X) \geq g(Y)$.

② $\boxed{\Leftarrow}$ (a) Wenn f ein Isomorphismus ist, ist $X \cong Y$, also $g(X) = g(Y)$.

(b) Wenn $g(Y) = 1$ und f étale ist, dann ist nach Hurwitzformel $2g(X) - 2 = \deg f \cdot (2 \cdot 1 - 2) + \underbrace{\deg R}_{0 \text{ da } f \text{ étale} \Rightarrow \text{unverzweigt}} = \deg f \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow g(X) = 1 = g(Y)$.

(c) Wenn $g(X) = 0$, gilt nach Hurwitzformel $0 > -2 = 2 \cdot g(X) - 2 = \underbrace{\deg f}_{\geq 1} \cdot (2g(Y) - 2) + \underbrace{\deg R}_{\geq 0, \text{ da } R \geq 0} \Rightarrow 2g(Y) - 2 < 0 \Rightarrow g(Y) < 1 \Rightarrow g(Y) = 0 = g(X)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $g := g(X) = g(Y)$. Nach Hurwitzformel gilt:

$$2g - 2 = \deg f \cdot (2g - 2) + \deg R \quad \Rightarrow \underbrace{(1 - \deg f)}_{\leq 0} \cdot (2g - 2) = \underbrace{\deg R}_{\geq 0}$$

Wenn $\deg R > 0$, dann muss $1 - \deg f \neq 0$ sein, also $1 - \deg f < 0$. Dann muss auch $2g - 2 < 0$ sein, also $g < 1$. Das heißt $g(X) = 0 = g(Y)$. $\Rightarrow$ (c).

Ansonsten ist $\deg R = 0$. Dann muss $1 - \deg f = 0$ oder $2g - 2 = 0$ sein. Im ersten Fall ist $\deg f = 1$, also f ein Isomorphismus $\rightsquigarrow$ (a). Im zweiten Fall ist $g(Y) = g = 1$. Weil $\deg R = 0$ und $R \geq 0$, ist $R = 0$. Das bedeutet, dass R an jedem Punkt unverzweigt, also étale, ist. $\Rightarrow$ (b).

Aufgabe 3

Weil $\mathbb{P}^1_k$ geometrisch zusammenhängend ist, ist nach Vorlesung k relativ algebraisch abgeschlossen in $K(\mathbb{P}^1_k)=k(t)$. Damit ist k auch in L relativ algebraisch abgeschlossen. Wähle $s\in L\setminus k$. Dann ist s transzendent über k.

$k(t)$ ist endlich erzeugt über k, also auch über $k(s)$. Wegen $\operatorname{trdeg}(k(t)/k(s))=\operatorname{trdeg}(k(t)/k)-\operatorname{trdeg}(k(s)/k)=1-1=0$ ist $k(t)/k(s)$ auch algebraisch, insgesamt also endlich. Wegen $L\subseteq k(t)$ ist auch L endlich über $k(s)$. Damit ist L endlich erzeugt über k. Außerdem ist $\operatorname{trdeg}(L/k)=\operatorname{trdeg}(L/k(s))+\operatorname{trdeg}(k(s)/k)=0+1=1$. Schließlich ist noch L/k separabel, weil k perfekt ist. Damit korrespondiert L zu einer Kurve X über k. Die Körpererweiterung $k(t)/L$ liefert einen dominanten Morphismus $\mathbb{P}^1_k\longrightarrow X$. Nach Aufgabe 2 ist $g(X)\leq g(\mathbb{P}^1_k)=0$, also $g(X)=0$. Ein beliebiger k-wertiger Punkt $\operatorname{Spec} k\to\mathbb{P}^1_k$ liefert $\operatorname{Spec} k\to\mathbb{P}^1_k\to X$, also ist $X(k)\neq\emptyset$. Wie in Blatt 11, Aufgabe 2 folgt nun $X\cong\mathbb{P}^1_k$. Damit ist $L=K(X)\cong K(\mathbb{P}^1_k)\cong k(t)$.

Aufgabe 4

① Nach Algebra I ist $K(X)/L$ eine endliche Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(K(X)/L)$.

Sei $V = \mathrm{Spec}\, A$ eine affin-offene Umgebung von $y \in Y$ und $U := \pi^{-1}(V)$. Nach Vorlesung ist $U = \mathrm{Spec}\, B$ mit B dem ganzen Abschluss von A in $K(X)$. Nun operiert G auf B, denn für $b \in B$ mit Minimalpolynom $\mu_b \in A[T]$ und $\sigma \in G$ ist $\mu_b(\sigma(b)) = \sigma(\mu_b(b)) = \sigma(0) = 0$, also ist $\mu_{\sigma(b)} = \mu_b \in A[T]$ ganz. Damit ist $\sigma(b)$ wieder ein Element von B und die Operation von σ auf $K(X)$ schränkt sich auf B ein.

Sei $\mathfrak{q} \in A$ das Primideal von A, das $y \in V$ entspricht. Weil $\pi^{-1}(y) \subseteq U$ gilt, ist die zu zeigende Aussage, dass G transitiv auf $\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, B : \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{q}\}$ operiert. Das ist vielleicht bekannt aus algebraischer Zahlentheorie. Falls nicht:

$\mathfrak{q}$ ist ein maximales Ideal, weil $y \in Y$ abgeschlossen ist. Weil $A \to B$ ganz ist, sind alle $\mathfrak{P} \in M := \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, B : \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{q}\}$ auch maximal! Insbesondere ist $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = (1)$ für verschiedene $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in M$.

Angenommen, G operiert nicht transitiv auf M. Dann gibt es $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}' \in M$, die nicht auf der gleichen Bahn liegen. Nach oben sind die Ideale $\sigma(\mathfrak{P})$, $\sigma \in G$ und $\mathfrak{P}'$ paarweise komaximal. Also existiert nach chinesischem Restsatz ein $b \in B$ mit $b \equiv 0\ (\mathfrak{P}')$, $b \equiv 1\ (\sigma\mathfrak{P})$ für alle $\sigma \in G$.

Für die Norm $N_{K(X)/L}(b) \in A$ gilt nun:

- $b \in \mathfrak{P}' \Rightarrow N_{K(X)/L}(b) = \underbrace{b}_{\in \mathfrak{P}'} \cdot \underbrace{\prod_{\sigma \neq id} \sigma(b)}_{\in B} \in \mathfrak{P}' \Rightarrow N_{K(X)/L}(b) \in \mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{q}$
- $b \notin \sigma\mathfrak{P}\ \forall \sigma \Rightarrow \sigma b \notin \mathfrak{P}\ \forall \sigma \Rightarrow N_{K(X)/L}(b) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(b) \notin \mathfrak{P} \Rightarrow N_{K(X)/L}(b) \notin \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{q}$

$\Big\}\ \lightning$

② Jeder L-Automorphismus $\sigma \in G$ von $K(X)$ gibt einen Automorphismus von X über Y. Seien $x, x' \in \pi^{-1}(y)$. Nach ① gibt es ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(x) = x'$. $\Rightarrow e_{x|y} = e_{\sigma(x)|y} = e_{x'|y}$.

Sei $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_g\}$. Nach Blatt 11, Aufgabe 1 ist $X \times_Y \mathrm{Spec}\, k(y) = \mathrm{Spec}\, A$ für eine endliche $k(y)$-Algebra A. Dabei ist $\dim_{k(y)} A = \deg \pi = [k(X):L] = \#G = n$. Wie in der Lösung dieser Aufgabe ist $A = \prod_{i=1}^{g} A_{x_i}$ mit

Uniformisator in $\mathcal{O}_{Y,y}$

$$\operatorname{Spec} A_{x_i} = \operatorname{Spec} A \times_X \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_i} = \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,x_i} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)\right) = \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,x_i} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y,y}/(\pi_y)\right) = \operatorname{Spec}\left(\mathcal{O}_{X,x_i}/\pi_y \mathcal{O}_{X,x_i}\right) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x_i}/(\pi_{x_i})^{e_{x_i|y}}$$

$$\Rightarrow A_{x_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}/(\pi_{x_i})^{e_{x_i|y}} = \mathcal{O}_{X,x_i}/(\pi_{x_i})^{e}$$

$$\Rightarrow n = \dim_{k(y)} A = \sum_{i=1}^{g} \dim_{k(y)} A_{x_i} = \sum_{i=1}^{g} \dim_{k(y)}\left(\mathcal{O}_{X,x_i}/(\pi_{x_i})^{e}\right) \overset{\mathcal{O}_{X,x_i}\ \text{DVR}}{=} \sum_{i=1}^{g} e \cdot [k(x_i):k(y)] \overset{k=\bar{k}}{=} \sum_{i=1}^{g} e \cdot [k:k] = g \cdot e \Rightarrow g = \frac{n}{e}.$$

③ Weil π keine wilde Verzweigung hat, folgt aus der Hurwitzformel:

$$2g-2 = n \cdot (2g(Y)-2) + \deg R = n \cdot (2g(Y)-2) + \sum_{\substack{x \in X \\ \text{abg.}}} (e_{x|f(x)} - 1) = n \cdot (2g(Y)-2) + \sum_{\substack{y \in Y \\ \text{abg}}} (e_y - 1) \cdot \# \pi^{-1}(y) = n \cdot (2g(Y)-2) + \sum_{i=1}^{r} (e_i - 1) \cdot \# \pi^{-1}(y_i)$$

$$\Rightarrow \frac{2g-2}{n} = 2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{r} \frac{(e_i - 1)\# \pi^{-1}(y_i)}{n} \overset{②}{=} 2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{r} \frac{e_i - 1}{e_i} = 2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right)$$

④ In ③ ist die linke Seite $\frac{2g-2}{n} \geq \frac{2 \cdot 2 - 2}{n} = \frac{2}{n} > 0$, also ist auch die rechte Seite $(=: R)$ positiv. Behauptung: $R \geq \frac{1}{42}$.

- Wenn $g(Y) \geq 2$, ist $R \geq 2 \cdot 2 - 2 = 2 \geq \frac{1}{42}$.
- Wenn $g(Y) = 1$, dann muss $r > 0$ sein, sonst wäre ja $R = 2 \cdot 1 - 2 = 0$. Also ist $R \geq 2 \cdot 1 - 2 + \left(1 - \frac{1}{e_1}\right) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{42}$.
- Jetzt fehlt noch $g(Y) = 0$. Wenn $r \geq 5$, dann ist $R \geq -2 + \sum_{i=1}^{5} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right) \geq -2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{42}$.
- Wenn $r = 4$, dann muss ein $e_i \geq 3$ sein. Ansonsten wären ja alle $e_i = 2$, also $R = -2 + \sum_{i=1}^{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ↯. Mit $e_i \geq 3$ für ein i gilt dass $R \geq -2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{42}$.
- ggf. e_1, e_2 irgendwie definieren
  Wenn $r \leq 2$, dann ist $R \leq -2 + \left(1 - \frac{1}{e_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{e_2}\right) < -2 + 1 + 1 = 0$ ↯
- Jetzt fehlt nur noch $r = 3$. Nehme zuerst an, dass alle $e_i \geq 3$ sind. Dann muss eines der $e_i \geq 4$ sein. Ansonsten wäre $e_i = 3$ für alle i, also $R = -2 + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -2 + 2 = 0$ ↯. So ist aber $R \geq -2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{1}{12} \geq \frac{1}{42}$.
- Sei nun oBdA $e_1 = 2$. Wenn $e_2, e_3 \geq 4$, dann muss eines von beiden ≥ 5 sein, sonst wäre ja $R = -2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0$ ↯

  Also ist $R \geq -2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \geq \frac{1}{42}$.

- Jetzt bleibt noch oBdA $e_1=2$, $e_2=3$. Wenn $e_3 \leq 6$, dann wäre $R \leq -2+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{6}) = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = 0$ ↯. Also ist $e_3 \geq 7$ und

es folgt $R \geq -2+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{7}) = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7} = \frac{1}{42}$.

Also gilt $\frac{2g-2}{n} = R \geq \frac{1}{42} \Rightarrow n \leq 42\cdot(2g-2) \Rightarrow \#G \leq 84(g-1)$.