Blatt 14

Aufgabe 1

① Seien $P,Q \in X$ abgeschlossene Punkte.

$$h^0(\mathcal{L})-h^0(\mathcal{L}-P-Q) \overset{RR}{=} \left(h^0(K-\mathcal{L})+\deg\mathcal{L}+1-g\right)-\left(h^0(K-\mathcal{L}+P+Q)+\deg(\mathcal{L}-P-Q)+1-g\right) = h^0(\underbrace{K-\mathcal{L}}_{\substack{\deg\le(2g-2)-(2g+1)\\=-3<0}})-h^0(\underbrace{K-\mathcal{L}+P+Q}_{\substack{\deg\le(2g-2)-(2g+1)+2\\=-1<0}})+\deg(P+Q)$$

$$=0-0+2=2$$

Nach Vorlesung ist $\mathcal{L}$ sehr ampel.

② $\deg \Omega_{X/k}^{\otimes 3} = 3\cdot(2g-2) = 6g-6 \overset{g\ge 2}{\ge} 2g+8-6 = 2g+2 \ge 2g+1 \overset{①}{\Rightarrow} \Omega_{X/k}^{\otimes 3}$ sehr ampel

$\deg \Omega_{X/k}^{\otimes 2} = 2\cdot(2g-2) = 4g-4 \overset{g\ge 3}{\ge} 2g+6-4 = 2g+2 \ge 2g+1 \overset{①}{\Rightarrow} \Omega_{X/k}^{\otimes 2}$ sehr ampel

③ Sei $P\in X$ ein abgeschlossener Punkt. Dann ist $\deg(3P)=3=2\cdot g+1$. Nach ① ist $\mathcal{O}_X(3P)$ sehr ampel.

Nach Riemann-Roch ist $h^0(3P)=h^0(\underbrace{K-3P}_{\deg=2-3<0})+\deg(3P)+1-g=0+3+1-1=3$. Weil $\mathcal{O}_X(3P)$ von globalen Schnitten erzeugt ist, gibt das eine surjektive Abbildung $\mathcal{O}_X^3 \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(3P)$. Diese entspricht einer Einbettung $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_k^2$ mit $\mathcal{O}_X(3P)=\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Weil X eigentlich ist, ist auch ι eigentlich, also ist ι eine abgeschlossene Einbettung.

Jetzt ist X ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}^2$, also $X=V_+(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}\le k[X,Y,Z]$ homogen. Damit die Dimension passt, muss $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal sein, also $X=V_+(f)$ mit f homogen von Grad d. Nach Blatt 12, Aufgabe 1 ist $1=g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$

$\Rightarrow d=0 \vee d=3$. $d=0$ ergibt keinen Sinn, also $d=3$.

Aufgabe 2

① $X = \operatorname{Spec} A \Rightarrow 1 \in A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ mit $D(1) = X$ affin und überdeckt $X \Rightarrow \mathcal{O}_X$ ampel

(1,5) Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X = \operatorname{Spec} A$. Nach Vorlesung ist $\mathcal{L} = \tilde{P}$ mit P einem projektiven A-Modul P von Rang 1.

Sei P erzeugt von $(p_i)_{i\in I}$, $p_i \in P = H^0(X, \mathcal{L})$. Zeige nach $X = \bigcup_{i\in I} D(p_i)$.

Sei $x \in X$. Dann ist $\mathcal{L}_x$ ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul von Rang 1, der von $\left(\frac{p_i}{1}\right)_{i\in I}$ erzeugt wird. Nach einem Isomorphismus $\mathcal{L}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$

ist $(1) = \left(\frac{p_i}{1} : i \in I\right)$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Dann liegen nicht alle $\frac{p_i}{1}$ in $\mathfrak{m}_x$, also ist ein $\frac{p_i}{1} \in \mathcal{O}_{X,x}^\times \Rightarrow x \in D(p_i)$.

Also $X = \bigcup_i D(p_i)$. Außerdem ist $D(p_i)$ als standard-offene Menge in $\operatorname{Spec} A$ affin.

② Sei $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y$ eine offene Immersion mit Y affin. Nach ① ist $\mathcal{O}_Y$ ampel. Nach Vorlesung ist $j^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ ampel.

③ Weil X quasikompakt ist, gibt es eine endliche affin-offene Überdeckung $(U_i)_{1\le i\le n}$, $U_i = \operatorname{Spec} R_i$. Weil X quasiseparie̲rt ist, ist

$U_i \cap U_j$ quasikompakt. Sei $(V_{ijk})_{1\le k\le n_{ij}}$ eine affin-offene Überdeckung von $U_i \cap U_j$, $V_{ijk} = S_{ijk}$. Sei $f_i := f|_{U_i} \in R_i$ und $f_{ijk} := f|_{V_{ijk}} \in S_{ijk}$.

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \cong \left\{ (g_i \in \mathcal{O}_{U_i}(D(f_i)))_{1\le i\le n} : g_i|_{V_{ijk}} = g_j|_{V_{ijk}} \right\} = \left\{ \left(\frac{a_i}{f_i^{k_i}} \in (R_i)_{f_i}\right)_{1\le i\le n} : \frac{a_i}{f_i^{k_i}} = \frac{a_j}{f_j^{k_j}} \in S_{ijk} \right\} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \left\{ \left(\frac{b_i}{f_i^m} \in (R_i)_{f_i}\right)_{1\le i\le n} : f_{ijk}^{m+r_{ijk}} b_i = f_{ijk}^{m+r_{ijk}} b_j \in S_{ijk} \right\}$$

$$\overset{\text{alles mit } f_{ijk}^{m+\max r_{ijk}} \text{ erweitern}}{=} \left\{ \left(\frac{c_i}{f_i^{m'}} \in (R_i)_{f_i}\right)_{1\le i\le n} : c_i = c_j \text{ in } S_{ijk} \right\} = \left\{ \frac{a}{f^{m'}} : a \in \mathcal{O}_X(X) \right\} = \mathcal{O}_X(X)_f$$

④ X hat eine Überdeckung aus affinen $D_X(s_i)$, $s_i \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Behauptung: $X \overset{\eta}{\to} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X) =: Y$ identifiziert X mit der offenen

Teilmenge $V = \bigcup_i D_Y(s_i)$ von Y. Isomorphie kann man lokal im Bild testen. Zeige also, dass $\eta^{-1}(D_Y(s_i)) \xrightarrow{\eta} D_Y(s_i)$ ein

Isomorphismus ist für alle i:

$\mathcal{O}_{Y,\eta(x)} \xrightarrow{\eta^\#} \mathcal{O}_{X,x}$ lokal

Für $x \in X$ ist $x \in \eta^{-1}(D_Y(s_i)) \Leftrightarrow \eta(x) \in D_Y(s_i) \Leftrightarrow s_i \notin \mathfrak{m}_{\eta(x)} \Leftrightarrow s_i = \eta^\#(s_i) \notin \mathfrak{m}_x \Leftrightarrow x \in D_X(s_i)$

Weil $D_X(s_i)$ affin ist, ist $D_X(s_i) \overset{\eta}{\cong} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(D_X(s_i)) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X)_{s_i}) = D_Y(s_i)$.

$\Rightarrow \eta : X \to V$ lokal iso $\Rightarrow \eta : X \to V$ iso.

Aufgabe 3

① Seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ ampel auf X. Zeige zunächst, dass $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{M}$ ampel auf $X\times X$ ist. Wähle $(s_i)_{i\in I}\subset H^0(X,\mathcal{L}^d)$

und $(t_j)_{j\in J}\subset H^0(X,\mathcal{M}^e)$ mit $(D(s_i))_i$ und $(D(t_j))_j$ affin-offene Überdeckungen von X. Dann ist

$s_i^{\otimes e}\otimes t_j^{\otimes d}\in H^0(X\times X, p_1^*\mathcal{L}^{de}\otimes p_2^*\mathcal{M}^{de}) = H^0(X\times X, (p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{M})^{de})$. Sei $(x,y)\in X\times X$. Dann gilt:

$$(x,y)\in D(s_i^{\otimes e}\otimes t_j^{\otimes d}) \overset{\text{Wähle Iso des Halms zu } \mathcal{O}_{X\times X,(x,y)}}{\Leftrightarrow} s_i^e\otimes t_j^d\in \mathcal{O}_{X\times X,(x,y)}^\times = (\mathcal{O}_{X,x}\otimes\mathcal{O}_{X,y})^\times \Leftrightarrow s_i^e\in\mathcal{O}_{X,x}^\times \wedge t_j^d\in\mathcal{O}_{X,y}^\times \Leftrightarrow s_i\in\mathcal{O}_{X,x}^\times\wedge t_j\in\mathcal{O}_{X,y} \Leftrightarrow x\in D(s_i)\wedge y\in D(t_j) \Leftrightarrow (x,y)\in D(s_i)\times D(t_j).$$

Die $D(s_i)\times D(t_j)$ bilden eine affin-offene Überdeckung von $X\times X$ $\Rightarrow$ $p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2\mathcal{M}$ ampel.

Damit ist auch $\Delta^*(p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{M}) = (\Delta^*p_1^*\mathcal{L})\otimes(\Delta^*p_2^*\mathcal{M}) = id^*\mathcal{L}\otimes id^*\mathcal{M} = \mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ ampel.

② Segre-Einbettung: $\underset{\operatorname{Proj} k[X_0,\dots,X_n]}{\mathbb{P}^n}\times\underset{\operatorname{Proj} k[Y_0,\dots,Y_m]}{\mathbb{P}^m}\xrightarrow{\iota}\underset{\operatorname{Proj} k[T_{ij}:\,0\le i\le n,\,0\le j\le m]}{\mathbb{P}^{nm+n+m}}$ lokal gegeben durch

$$\begin{array}{ccc}
D_+(X_i)\times D_+(Y_j) & \longrightarrow & D_+(T_{ij}) \\
\| & & \| \\
\operatorname{Spec}(k[X]_{(X_i)}\otimes k[Y]_{(Y_j)}) & & \operatorname{Spec} k[T]_{(T_{ij})} \\
\| & & \| \\
\operatorname{Spec} k[\frac{X_a}{X_i},\frac{Y_b}{Y_j} : a\neq i, b\neq j] & & \operatorname{Spec} k[\frac{T_{ab}}{T_{ij}} : (a,b)\neq(i,j)] \\
X_a\cdot Y_b & \longleftarrow\!\shortmid & T_{ab}
\end{array}$$

Diese Ringabbildungen sind surjektiv, denn $\frac{X_a}{X_i}$ wird von $\frac{T_{aj}}{T_{ij}}$

und $\frac{Y_b}{Y_j}$ von $\frac{T_{ib}}{T_{ij}}$ getroffen. $\rightsquigarrow$ ι ist abgeschlossene Einbettung.

Zeige, dass $\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) = p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ gilt. Dann:

Seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ sehr ampel auf X. Diese liefern abgeschlossene Einbettungen $f: X\hookrightarrow\mathbb{P}_k^n$ und $g: X\hookrightarrow\mathbb{P}_k^m$.

Zusammen gibt das eine abgeschlossene Einbettung $X\overset{(f,g)}{\hookrightarrow}\mathbb{P}_k^n\times\mathbb{P}_k^m\overset{\iota}{\hookrightarrow}\mathbb{P}_k^N$, $N=nm+n+m$. Dabei gilt:

$$(\iota\circ(f,g))^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^N}(1) = (f,g)^*(p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))) = (p_1\circ(f,g))^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes(p_2\circ(f,g))^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) = \mathcal{L}\otimes\mathcal{M}.$$

Jetzt noch $\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$: $\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))|_{D_+(X_i)\times D_+(Y_j)} = \iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_{D_+(T_{ij})}) = \iota^*(\widetilde{(k[T]_{T_{ij}})_1}) = ((k[T]_{T_{ij}})_1\otimes_{k[T]_{(T_{ij})}}(k[X]_{(X_i)}\otimes k[Y]_{(Y_j)}))^\sim$

$$= (\langle T_{ab} : (a,b)\neq(i,j)\rangle_{k[T]_{(T_{ij})}} / (\tfrac{T_{ab}}{T_{ij}} - \tfrac{T_{aj}}{T_{ij}}\tfrac{T_{ib}}{T_{ij}}))^\sim = (\langle T_{aj} : a\neq i\,;\, T_{ib} : b\neq j\rangle_{k[T]_{(T_{ij})}})^\sim$$