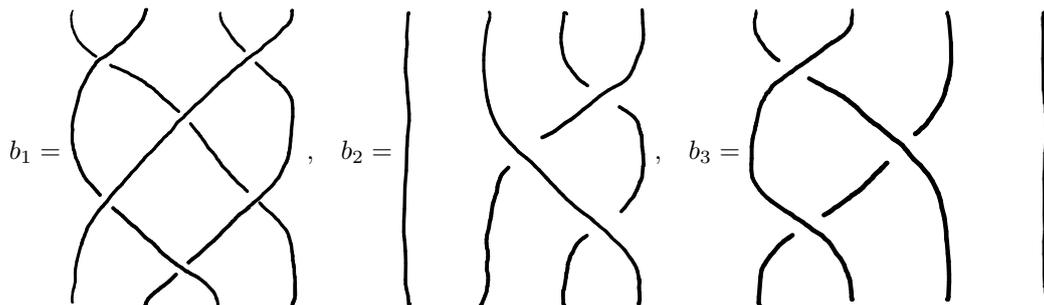


## 1. Übungsblatt zur Vorlesung Zopfgruppen

Abgabe bis 27. Oktober

### Aufgabe 1.1 (Multiplikation von Zöpfen)

Betrachten Sie die Zöpfe



Bestimmen Sie alle Produkte dieser drei Zöpfe in jeder Reihenfolge.

*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst die Produkte von je zwei Zöpfen und vergleichen Sie sie.

### Aufgabe 1.2 (Gruppenaxiome)

Verifizieren Sie, soweit nicht in der Vorlesung geschehen, dass  $B_n$  eine Gruppe ist. Das heißt, gegeben drei geometrische Zöpfe  $b_1, b_2, b_3$  finden Sie Isotopien

- a) von  $(b_1 \cdot b_2) \cdot b_3$  nach  $b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3)$ ,
- b) von  $b_1$  nach  $b_1 \cdot 1$  und
- c) von  $1$  nach  $b_1 \cdot \bar{b}_1$

wobei  $\bar{b}_1$  das Bild von  $b_1$  unter einer Reflektion in der Ebene  $t = 1/2$  ist.

### Aufgabe 1.3 (Zöpfe und Permutationen)

Für eine Menge  $X$  bezeichnen wir mit  $\text{Sym}(X)$  die symmetrische Gruppe auf  $X$ . Im Folgenden schreiben wir implizit geometrische Zöpfe wie in (1). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
 B_n &\rightarrow S_n := \text{Sym}(\{(1,0), \dots, (n,0)\}) \\
 b &\mapsto ((i,0) \mapsto b_i(1))^{-1}
 \end{aligned}$$

ein wohldefinierter surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. Folgern Sie, dass  $B_n$  nicht trivial ist und für  $n \geq 3$  nicht abelsch ist.

*Hinweis:*  $S_n$  wird durch Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt.

**Aufgabe 1.4** (Abstand von Zöpfen)

Wir schreiben einen geometrischen Zopf  $b$  als

$$b = \{(b_i(t), t) \mid 1 \leq i \leq n, t \in I\} \quad (1)$$

für stetige Abbildungen  $b_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  (mit  $b_i(0) = (i, 0)$ ). In der Vorlesung haben wir definiert

$$\tilde{d}(b, b') := \max_i \max_{t \in I} d(b_i(t), b'_i(t))$$

und

$$|b| := \min_{i \neq j} \min_{t \in I} d(b_i(t), b_j(t)).$$

Zeigen Sie, dass  $\tilde{d}$  eine Metrik auf der Menge der geometrischen Zöpfe ist. Zeigen Sie außerdem dass gilt

$$|b| \leq \tilde{d}(b, b') + |b'|.$$