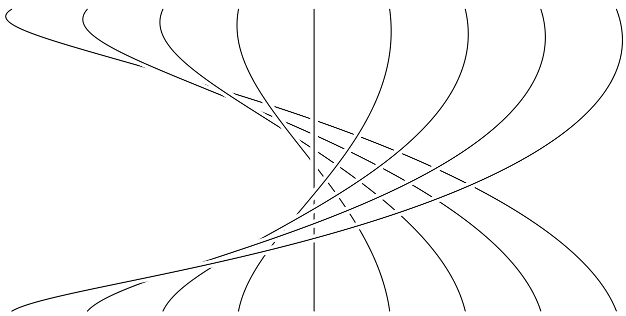
Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux WS 14/15

3. Übungsblatt zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 3.1 (Automorphismen)

a) Beobachten Sie, dass Spiegelung an der Ebene $x = (n+1)/2$ einen Automorphismus $\rho^n_{\leftrightarrow} : B_n \to B_n$ der Ordnung 2 induziert. Beobachten Sie analog, dass Spiegelung an der Ebene $y = 0$ einen Automorphismus $\rho^n_{\swarrow\!\!\nearrow} : B_n \to B_n$ der Ordnung 2 induziert, der mit $\rho^n_{\leftrightarrow}$ kommutiert. Beschreiben Sie, was die beiden Automorphismen auf den Erzeugern σ_i tun.

b) Sei $\rho^n_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation der Ebene mit Mittelpunkt $((n+1)/2, 0)$ um πt mit Orientierung so dass $\rho^n_t(1,0)$ nicht-positive y-Koordinate hat (siehe Abbildung). Sei Δ_n der geometrische Zopf $\{(\rho^n_t(i,0),t) \mid 1 \leq i \leq n, 0 \leq t \leq 1\}$ in B_n. Zeigen Sie, dass Konjugation mit Δ_n genau $\rho^n_{\leftrightarrow} \circ \rho^n_{\swarrow\!\!\nearrow}$ ist d.h., dass gilt $\rho_{\leftrightarrow}(\rho_{\swarrow\!\!\nearrow}(b)) = \Delta_n b \Delta_n^{-1}$. Folgern Sie, dass Δ_n^2 zentral ist, also mit allen Elementen in B_n kommutiert.



Δ_9

Hinweis: Zwei Homomorphismen $B_n \to B_n$ stimmen überein, wenn sie auf einer Erzeugendenmenge übereinstimmen.

Aufgabe 3.2 (Abelsche Quotienten reiner Zopfgruppen)

a) Zeigen Sie, dass die Zopfgruppe B_2 isomorph ist zu $\mathbb{Z}$ und, dass die reine Zopfgruppe P_2 unter diesem Isomorphismus zur Untergruppe $2\mathbb{Z}$ korrespondiert (und damit selbst isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist).

b) Überzeugen Sie sich, dass es für jede Teilmenge $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ einen surjektiven Homomorphismus $P_n \to P_{|I|}$ gibt, der die Stränge mit Indizes außerhalb von I „vergisst“. Nutzen Sie dies um einen Homomorphismus $P_n \to \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$ zu konstruieren und zeigen Sie, dass er surjektiv ist.

Aufgabe 3.3 (Universelle Eigenschaft von präsentierten Monoiden)

Zeigen Sie, dass das Monoid $M := \langle X \mid R \rangle_M$ universell ist bezüglicher der Monoide in die X abgebildet werden kann so, dass R gilt. D.h. zeigen Sie, dass folgendes gilt: ist N ein Monoid und $f\colon X \to N$ eine Abbildung so, dass für jede Relation $(x_1 \cdots x_k, y_1 \cdots y_m)$ in R gilt $f(x_1) \cdots f(x_k) = f(y_1) \cdots f(y_m)$, dann existiert genau ein Monoid-Homomorphismus $\tilde{f}\colon M \to N$ der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt.

Hinweis: Liften Sie f zunächst zu einer Abbildung $X^* \to N$ und vergleichen Sie die induzierte Kongruenzrelation auf X^* mit der kongruenten Hülle von R.