Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux WS 14/15

5. Übungsblatt zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 5.1 (Relationen in reinen Zopfgruppen)

Die reine Zopfgruppe wird erzeugt von den Elementen $A_{i,j} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$, $i < j$. Zeigen Sie (graphisch oder durch Anwenden von Relationen in der Zopfgruppe), dass zwischen diesen Erzeugern die folgenden Relationen gelten, wobei $r < s$ und $i < j$:

$$A_{r,s}^{-1}A_{i,j}A_{r,s} = \begin{cases} A_{i,j} & s < i \text{ oder } i < r < s < j \\ A_{r,j}A_{i,j}A_{r,j}^{-1} & s = i \\ A_{r,j}A_{s,j}A_{i,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} & i = r < s < j \\ A_{r,j}A_{s,j}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}A_{r,j}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1} & r < i < s < j. \end{cases}$$

Aufgabe 5.2 (Entscheiden von Gleichheit)

Beweisen Sie, dass der Zopf $b = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ nicht trivial ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass ein Zopf nicht trival ist, steht Ihnen neben den Quotienten $B_n \to S_n$ (Aufgabe 1.3) und $P_n \to \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$ (Aufgabe 3.2) auch Aufgabe 4.2 zur Verfügung. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass U_i frei auf den freien Erzeugern $A_{j,i}$ ist.

Aufgabe 5.3 (Semidirektes Produkt)

Erinnern Sie sich, dass eine Gruppe G ein (inneres) semidirektes Produkt $N \rtimes H$ ist, wenn N ein Normalteiler von G ist und H eine Untergruppe von G so dass $N \cap H = \{1\}$ und $N \cdot H = G$.

a) Zeigen Sie: ist $G = N \rtimes H$, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$1 \to N \to G \xrightarrow{p} H \to 1. \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass sich G in der kurzen exakten Sequenz (1) als semidirektes Produkt $N \rtimes H$ schreiben lässt, wenn es einen Homomorphismus $s\colon H \to G$ gibt mit $p \circ s = \mathrm{id}_H$.

c) Zeigen Sie, dass $P_n = U_n \rtimes P_{n-1}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von $G \to N\backslash G$ auf H.

Aufgabe 5.4* (Hopf-Faserung)

Wir betrachten den Kreis $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ als die Menge der komplexen Zahlen von Norm 1 und $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ als die Menge der komplexen Vektoren mit zwei Einträgen von Norm 1. Schließlich ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ der Quotient von S^3 unter der Identifikation $(z_0, z_1) \sim \lambda(z_0, z_1)$ für $\lambda \in S^1$ und wir schreiben Äquivalenzklassen als $[z_0, z_1]$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ homöomorph ist zu S^2.

b) Zeigen Sie, dass $S^1 \to S^3 \xrightarrow{p} S^2$ ein Faserbündel ist. Verifizieren Sie dazu, dass auf der Menge $U_i := \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\}$ die Abbildung $h_i\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1, (z_0, z_1) \mapsto ([z_0, z_1], z_i/|z_i|)$ eine Trivialisierung ist.

c) Nutzen Sie die lange exakte Sequenz zu diesem Faserbündel um zu folgern, dass $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.