

6. Übungsblatt zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 6.1 (Zopfautomorphismen)

In der Vorlesung haben wir die Abbildung

$$\chi: B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$$
$$\sigma_i \mapsto \left(s_j \mapsto \begin{cases} s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} & j = i + 1 \\ s_{i+1} & j = i \\ s_j & j \neq i, i + 1 \end{cases} \right)$$

geometrisch durch die Wirkung der Abbildungsklassengruppe hergeleitet. Zeigen Sie durch direktes nachrechnen, dass die Abbildung ein Homomorphismus ist.

Hinweis: Verifizieren Sie zuerst, dass $\chi(\sigma_i)^{-1}(s_i) = s_i s_{i+1} s_i^{-1}$ und $\chi(\sigma_i)^{-1}(s_{i+1}) = s_i$.

Aufgabe 6.2 (Lösung des Wortproblems)

Wir betrachten noch einmal den Zopf $b = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2$. Verwenden Sie den Algorithmus zur Lösung des Wortproblems um zu zeigen, dass b nicht trivial ist. Zeigen Sie dazu, dass $\chi(b)(s_i) \neq s_i$ für mindestens ein $1 \leq i \leq 3$.

Aufgabe 6.3 (Geschlossene Zöpfe und Zykel)

Sei b ein Zopf und $\bar{b} \subseteq D \times S^1$ sein Abschluss. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Komponenten von \bar{b} gleich der Anzahl der Zykel von $\pi(b)$ ist ($\pi: B_n \rightarrow S_n$).

Aufgabe 6.4* (Armband)

Kann das unten dargestellte Armband in mehrere Teile zerfallen während es getragen wird?
Hinweis: Benutzen Sie Satz 4.11.

