Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux WS 14/15

7. Übungsblatt zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 7.1 (Quotientengruppen 1)

Betrachten wir noch einmal das Monoid $M := \langle a, b \mid a^2 = b, b^2 = a \rangle_M$ aus der Vorlesung. Sei $G := \langle a, b \mid a^2 = b, b^2 = a \rangle$ die Gruppe mit derselben Präsentierung. Zeigen Sie, dass der natürliche Monoid-Homomorphismus $M \to G$ nicht injektiv ist. Zeigen Sie, dass M gemeinsame Rechtsvielfache besitzt, aber nicht rechtskürzbar ist.

Aufgabe 7.2 (Gemeinsame Teiler und Vielfache)

Bestimmen Sie in B_4^+

a) das kleinste gemeinsame Rechtsvielfache von σ_1, σ_2 und σ_3.

b) den größten gemeinsamen Teiler von $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2$ und $(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^2$.

Aufgabe 7.3 (Satz von Ore)

Es sei M ein Ore-Monoid und G die Gruppe der Rechtsbrüche von M.

a) Sei H eine Gruppe und $\varphi\colon M \to H$ ein Monoid-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon G \to H$, $\varphi([m,n]) = \phi(m)\phi(n)^{-1}$ ein Homomorphismus ist.

b*) Zeigen Sie, dass die auf G definierte Multiplikation assoziativ ist.

Aufgabe 7.4* (Quotientengruppen 2 (nach Malcev))

Betrachten Sie das Monoid $N := \langle a, b, c, d, u, v, x, y \mid ax = by, cx = dy, au = bv \rangle_M$.

a) Zeigen Sie, dass in N gilt $cu \neq dv$.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Monoid-Homomorphismus $\varphi\colon N \to H$ in eine Gruppe H gilt $\varphi(cu) = \varphi(dv)$.

c) Zeigen Sie, dass N rechtskürzbar ist (und folgern Sie, dass es keine gemeinsamen Rechtsvielfachen besitzt).

Hinweis: Berechnen Sie $\varphi(y)\varphi(x)^{-1}$. Die Erzeuger zerfallen in zwei Klassen und die Relationen erhalten die Klasse eines Buchstabens.