Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux

WS 14/15

Lösung des 3. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 3.1 (Automorphismen)

a) Dass die Automorphismen Ordnung zwei haben und kommutieren folgt aus den entsprechenden Aussagen für die Spiegelungen. Man sieht, dass $\rho^n_{\leftrightarrow}(\sigma_i) = \sigma^{-1}_{n-i}$ und, dass $\rho^n_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow}(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$.

b) Wir setzen $\rho_{\curvearrowright} := \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow}$. Dann gilt

$$\Delta_n \sigma_i \Delta_n^{-1} = \sigma_{n-i} = \rho_{\leftrightarrow}(\sigma_i^{-1}) = \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow}(\sigma_i).$$

Da $\rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow}$ und $\rho_{\leftrightarrow}$ beide Ordnung zwei haben und kommutieren, hat auch $\rho_{\curvearrowright}$ Ordnung zwei:

$$\rho^2_{\curvearrowright} = \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} \circ \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} = \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\leftrightarrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} \circ \rho_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} = \rho^2_{\leftrightarrow} \circ \rho^2_{\swarrow\!\!\!\!\nearrow} = \mathrm{id}\,.$$

Damit ist $\Delta_n^2 \sigma_i \Delta_n^{-2} = \rho^2_{\curvearrowright}(\sigma_i) = \sigma_i$ für alle i. Also kommutiert Δ_n^2 mit allen Erzeugern und damit auch mit allen Zöpfen.

Aufgabe 3.2 (Abelsche Quotienten reiner Zopfgruppen)

a) Die Abbildung aus Aufgabe 2.2 ist für B_2 ein Isomorphismus. Das sieht man mithilfe von Korollar 14: in B_2 gibt es keine Reidemeister-Bewegungen Ω_3. ...

b) Die Menge $\{1, \dots, n\}$ hat $\binom{n}{2}$ Teilmengen mit 2 Elementen. Für jede dieser Teilmengen erhalten wir einen Homomorphismus $P_n \to P_2 \cong \mathbb{Z}$. Dieser misst, wie oft (mit Vorzeichen) die Stränge mit Indizes in I sich umeinander winden. Für zwei beliebige Stränge findet man einen reinen Zopf der diese beiden Stränge genau einmal umeinander windet und alle anderen Paare von Strängen nicht. Damit ist der Homomorphismus surjektiv.

Aufgabe 3.3 (Universelle Eigenschaft von präsentierten Monoiden)

Wegen der universellen Eigenschaft des freien Monoids existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\hat{f}\colon X^* \to N$ mit $\hat{f}(x) = f(x)$. Damit haben wir die durchgezogenen Abbildungen im folgenden Diagramm (von denen alle außer die linke vertikale Abbildung Monoid-Homomorphismen sind). Wir wollen den gestrichelten Homomorphismus rechts konstruieren, so dass das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X^* \arrow[r] \arrow[dr, "\hat{f}"] & M \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\
X \arrow[u] \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Sei $\equiv$ die kongruente Hülle von R. Die obere horizontale Abbildung bildet ein Wort auf seine $\equiv$-Klasse ab und ist nach Konstruktion surjektiv. Deshalb gibt es nur eine eindeutige Möglichkeit $\tilde{f}$ zu definieren: wir müssen die $\equiv$-Klasse eines Wortes ω auf $\hat{f}(\omega)$ abbilden. Dadurch ist $\tilde{f}$ wohldefiniert, wenn gilt

$$\omega \equiv \omega' \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega') \quad :\Leftrightarrow \quad \omega \equiv_{\hat{f}} \omega'. \tag{1}$$

Nach Lemma 7 ist aber $\equiv_{\hat{f}}$ eine Kongruenzrelation und nach Voraussetzung ist sie gröber als R. Und $\equiv$ ist nach Definition die feinste Kongruenzrelation, die gröber als R ist. Also ist $\equiv$ mindestens so fein wie $\equiv_{\hat{f}}$, was gerade die Aussage von (1) ist.