Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux WS 14/15

Lösung des 4. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 4.1 (Homologie von B_n)

a) Nach Konstruktion ist $\omega(\sigma_i) = 1$ und $\omega(\sigma_i^{-1}) = -1$ für alle i. Also ist $\omega(\sigma_i^k) = k$ für jede ganze Zahl k. Schließlich ist
$$\omega(\sigma_{i_1}^{k_1} \cdots \sigma_{i_n}^{k_n}) = \sum_j k_j.$$

b) Wegen der Zopfrelationen gilt
$$\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \varphi(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}) = \varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1}).$$
Da außerdem A abelsch ist, kommutieren $\varphi(\sigma_i)$ und $\varphi(\sigma_{i+1})$, so dass gilt
$$\varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_{i+1})\varphi(\sigma_i)\varphi(\sigma_{i+1})$$
und somit $\varphi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_{i+1})$. Also nimmt φ auf allen Erzeugern denselben Wert $a \in A$ an. Wir können also $\psi\colon \mathbb{Z} \to A$ definieren durch $\psi(1) = a$ (so dass $\psi(k) = a^k$). Dann gilt
$$\varphi \circ \psi(\sigma_{i_1}^{k_1} \cdots \sigma_{i_n}^{k_n}) = \varphi(a^{k_1} \cdots a^{k_n}) = \sum k_j = \omega(\sigma_{i_1}^{k_1} \cdots \sigma_{i_n}^{k_n}).$$

c) Die Elemente $\sigma_{i_1}^{k_1} \cdots \sigma_{i_n}^{k_n}$ mit $\sum_j k_n = 0$ bilden genau den Kern von ω. Wir wollen also zeigen dass $[B_n, B_n] = \ker \omega$. Die Kommutatoruntergruppe $[B_n, B_n]$ ist die kleinste normale Untergruppe, so dass $B_n/[B_n, B_n]$ abelsch ist. Da $B_n/\ker \omega \cong \mathbb{Z}$ abelsch ist, folgt $[B_n, B_n] \subseteq \ker \omega$. Umgekehrt faktorisiert nach Aufgabenteil (b) die Abbildung $B_n \to B_n/[B_n, B_n]$ durch ω, also ist $\ker \omega \subseteq [B_n, B_n]$.

Aufgabe 4.2 (Eine Zerlegung reiner Zopfgruppen)

Sei $b \in P_n$ beliebig. Wir setzen $b' := f_n(b)$ und betrachten $u := \iota_{n-1}(b')^{-1}b$. Es ist
$$f_n(\iota_{n-1}(b')^{-1}b) = f_n(\iota_{n-1}(b')^{-1})f_n(b) = b'^{-1}b' = 1.$$
Also ist $u \in \ker f_n = U_n$ und $b = b'u$ wie gewünscht (wenn wir P_{n-1} durch ι_{n-1} als Untergruppe von P_n auffassen).

Nun ist P_1 trivial und damit $U_2 = P_2$. Wenden wir die obige Beschreibung induktiv auf b' an erhalten wir
$$b = b' \cdot u_n = b'' \cdot u_{n-1}u_n = \ldots = u_2 \cdots u_n.$$

Aufgabe 4.3 (Eine Monoid-Präsentierung)

Setzen wir $Q_3 := \left\langle a, b, c \mid a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c, ab = ba, bc = cb, ac = ca \right\rangle_M$.

a) Das Neutralelement von P_3 ist $\emptyset$, denn $\emptyset \cup M = M$. Das Monoid hat 8 Elemente: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$.

b) Wir behaupten, zunächst, dass es einen wohldefinierten Homomorphismus
$$\begin{aligned} Q_3 &\to P_3 \\ a &\mapsto \{a\} \\ b &\mapsto \{b\} \\ c &\mapsto \{c\} \end{aligned}$$

gibt.

Dazu verifizieren wir, dass die entsprechenden Relationen in P_3 gelten, z.B. $\{a\} \cup \{a\} = \{a\}$ und $\{a\} \cup \{b\} = \{b\} \cup \{a\}$. Um zu sehen, dass der Morphismus surjektiv ist, stellen wir fest, dass jede Teilmenge von $\{a, b, c\}$ als endliche Vereinigung aus den Mengen $\{a\}$, $\{b\}$ und $\{c\}$ hervorgeht.

Um Injektivität des Morphismus zu zeigen, beweisen wir, dass Q_3 höchstens 8 Elemente hat. Das freie Monoid auf a, b, c besteht aus Worten in a, b und c. Durch die letzten drei Relationen ist jedes solche Wort kongruent zu einem der Form $a^k b^\ell c^m$. Mit den ersten drei Relationen ist ein solches Wort kongruent mit einem bei dem $k, \ell, m \leq 1$. Es gibt genau 8 Worte dieser Form und damit sind wir fertig.