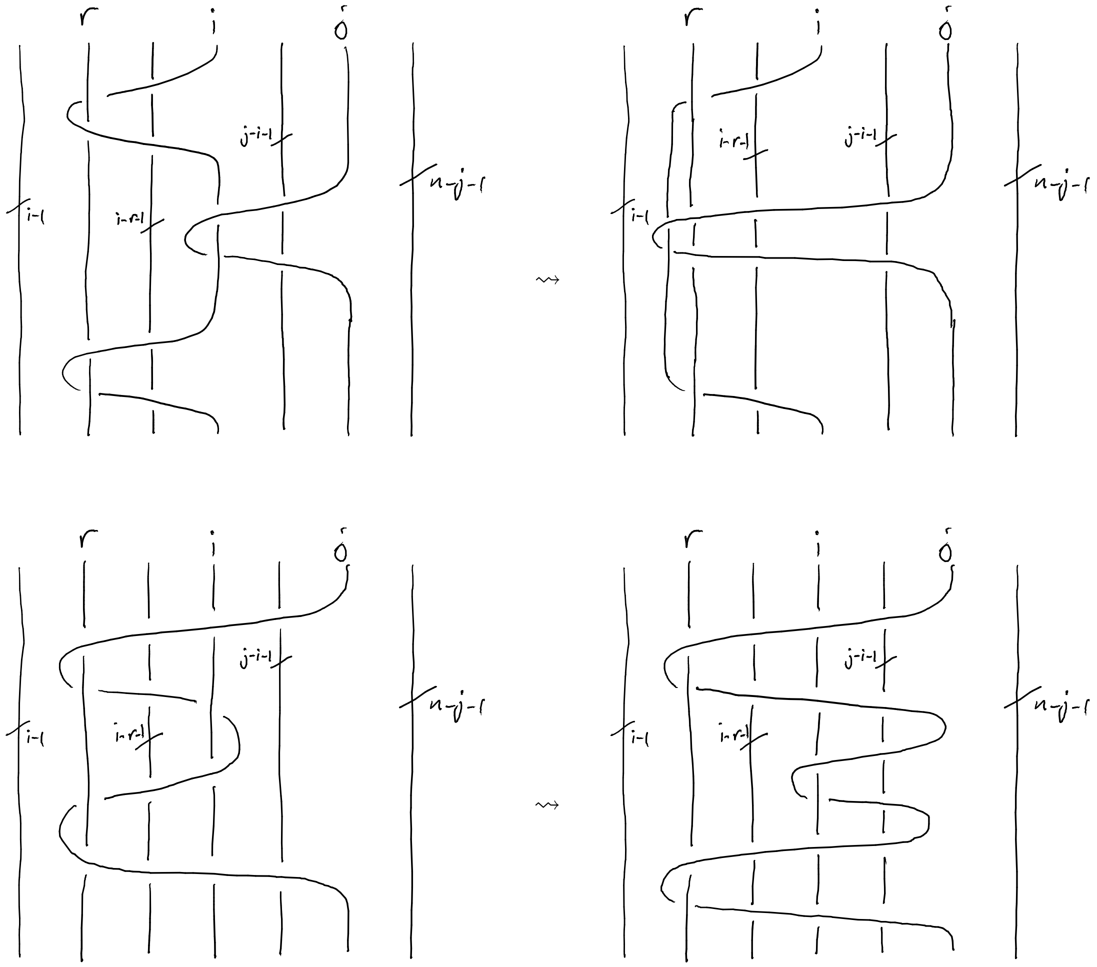
Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux

WS 14/15

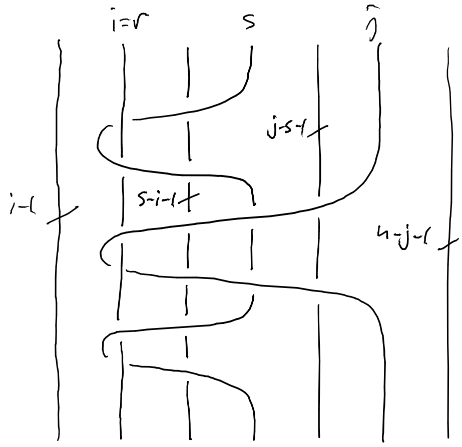
Lösung des 5. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 5.1 (Relationen in reinen Zopfgruppen)

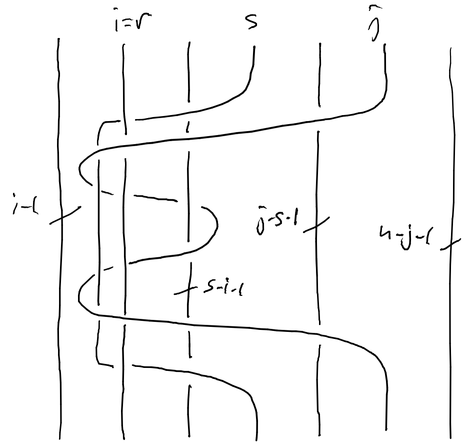
Die erste Relation ist relativ einfach. Für die zweite Relation ist hier eine graphische Lösung:

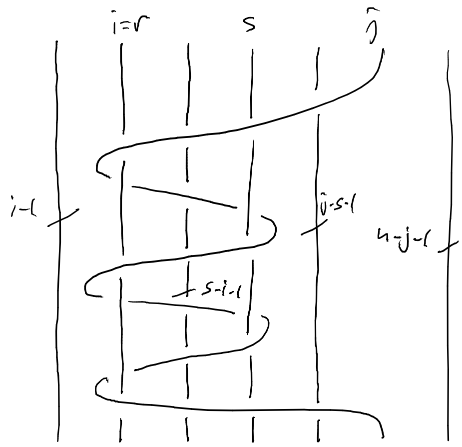


Die dritte Relation ist ähnlich:

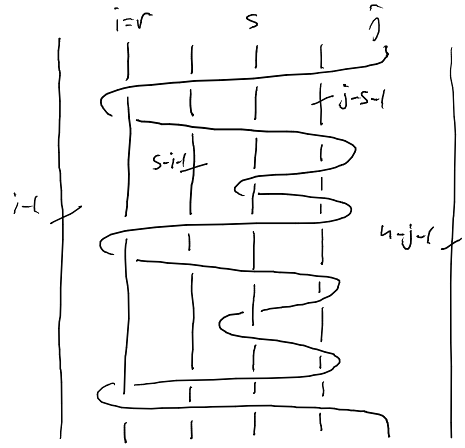


$\rightsquigarrow$

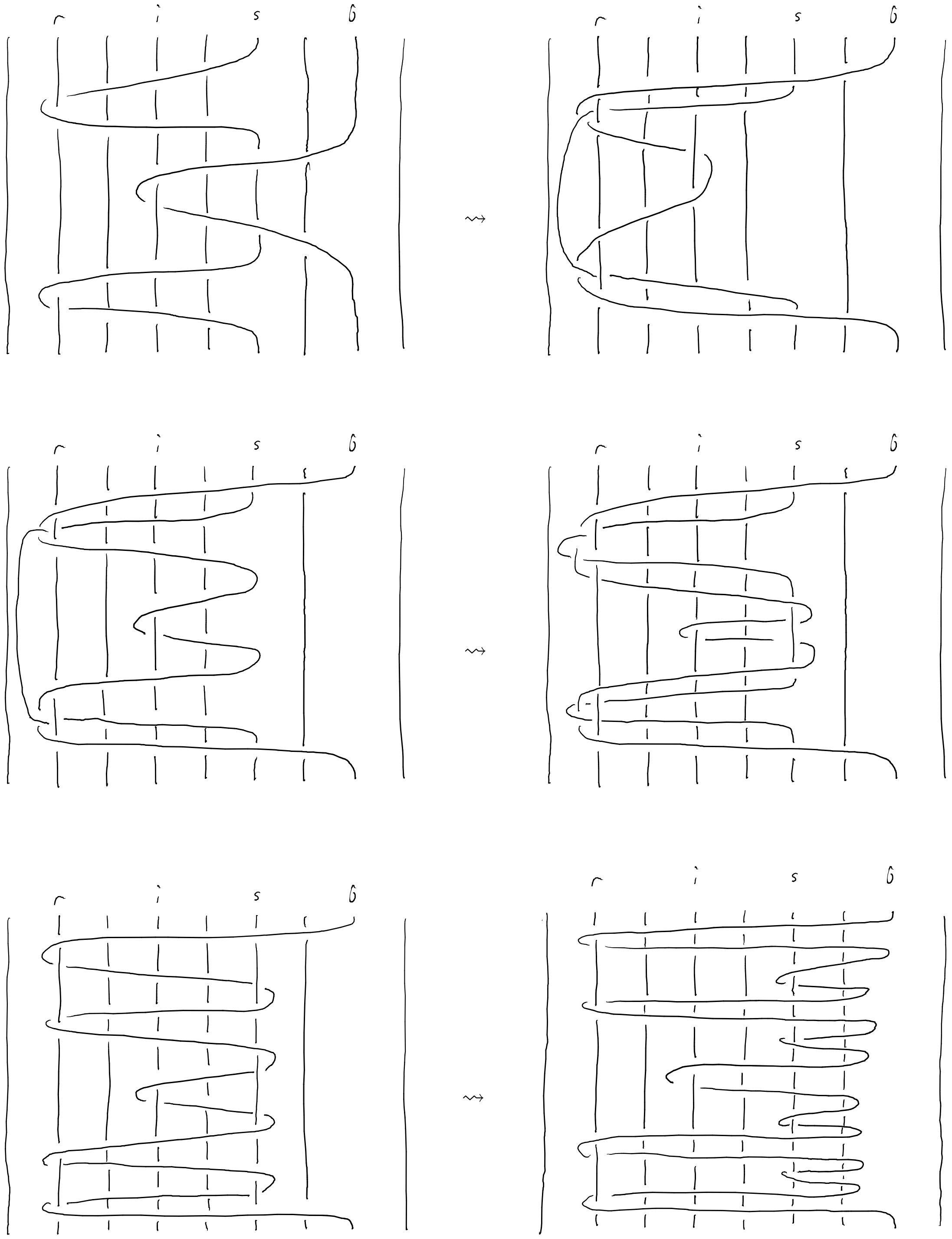




$\rightsquigarrow$

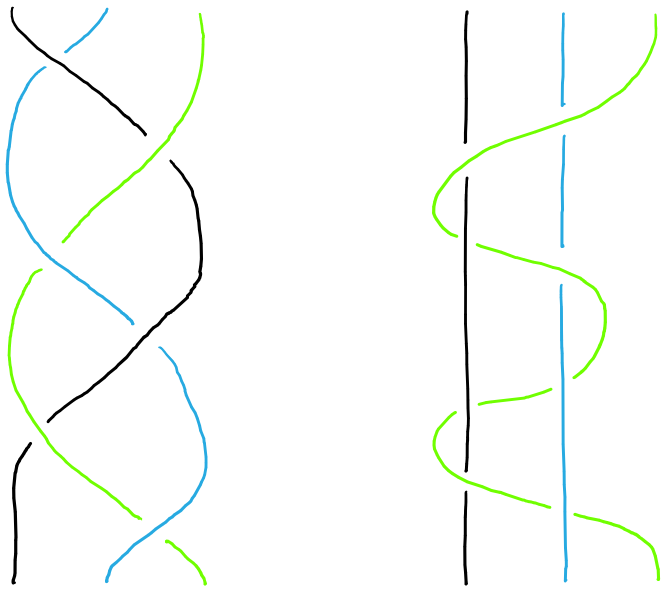


Die vierte Relation ist etwas komplizierter:



Aufgabe 5.2 (Entscheiden von Gleichheit)

Wir stellen fest, dass $b \in U_3$ liegt (tatsächlich ergibt weglassen eines beliebigen Strangs einen trivialen Zopf, deshalb können wir nicht Aufgabe 3.2 verwenden). Zunächst bestimmen wir graphisch die Beschreibung von b in den Erzeugern $A_{1,3}$ und $A_{2,3}$:



Wir sehen $b = A_{1,3}A_{2,3}^{-1}A_{1,3}^{-1}A_{2,3}$. Formal überprüfen wir das indem wir die $A_{i,3}$ ausdrücken durch σ_i:

$$A_{1,3}A_{2,3}^{-1}A_{1,3}^{-1}A_{2,3} = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_2^{-2} \cdot \sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_2^2 = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2$$

und verifizieren, dass $A_{1,3}A_{2,3}^{-1}A_{1,3}^{-1}A_{2,3} \cdot b^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2 \cdot \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1^2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 \\
&= \sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit haben wir b in der freien von $A_{1,3}$ und $A_{2,3}$ erzeugten Gruppe als nicht-triviales reduziertes Wort geschrieben. Also ist b nicht trivial.

Aufgabe 5.3 (Semidirektes Produkt)

a) Betrachten wir die Folge $1 \to N \to G \to N\backslash G \to 1$. Offensichtlich ist die erste Abbildung injektiv und die letzte surjektiv. Außerdem ist der Kern von $G \mapsto N\backslash G$ gerade N. Damit ist die Folge exakt. Wir wollen jetzt sehen, dass die Abbildung $G \to N\backslash G$ eingeschränkt auf H einen Isomorphismus $H \cong N\backslash G$ induziert. Die Abbildung ist surjektiv weil $NH = G$: ein beliebiges $g \in G$ kann geschrieben werden als nh mit $n \in N$ und $h \in H$, so dass $Ng = Nh$. Die Einschränkung der Abbildung auf H ist injektiv weil $N \cap H = \{1\}$: liegt $h \in H$ im Kern N, dann ist $h = 1$.

b) Sei eine kurze exakte Sequenz und ein Homomorphismus s wie in der Aufgabe gegeben. Wir betrachten N als Untergruppe von G (durch die injektive Abbildung). Da $p \circ s$ ein isomorphismus ist, ist s injektiv. Wir bezeichnen mit $\tilde{H} \leq G$ das Bild von s. Es ist isomorph zu H.

   Sei $g \in N \cap \tilde{H} \leq G$. Da $g \in \tilde{H}$ ist können wir schreiben $g = s(h)$ für ein $h \in H$. Nun ist aber $g \in N$, also $1 = p(g) = p(s(h))$. Daraus folgt $1 = s(p(s(h)) = s(h) = g$.

   Sei jetzt $g \in G$ beliebig. Wir setzen $h = s(p(g)) \in \tilde{H}$ und betrachten $n = gh^{-1}$. Es ist $p(n) = p(g)\dot{p}(h^{-1}) = p(g) \cdot p(s(p(g^{-1}))) = p(g) \cdot p(g^{-1}) = 1$ weil $p \circ s = \mathrm{id}$. Also ist $n \in N$ und $g = nh$ wie gewünscht.

c) Nach Definition von U_n existiert eine kurze exakte Sequenz

$$1 \to U_n \to P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to 1.$$

   Außerdem gilt für die Einbettung $\iota_{n-1} \colon P_{n-1} \to P_n$, dass $f_n \circ \iota_{n-1} = \mathrm{id}_{P_{n-1}}$.

Aufgabe 5.4* (Hopf-Faserung)

Wir betrachten den Kreis $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ als die Menge der komplexen Zahlen von Norm 1 und $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ als die Menge der komplexen Vektoren mit zwei Einträgen von Norm 1. Schließlich ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ der Quotient von S^3 unter der Identifikation $(z_0, z_1) \sim \lambda(z_0, z_1)$ für $\lambda \in S^1$ und wir schreiben Äquivalenzklassen als $[z_0, z_1]$.

a) Jedes Paar (z_0, z_1) mit $z_1 \neq 0$ ist äquivalent zu einem Paar (z, r) mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Für eine solches Paar ist r eindeutig durch z bestimmt durch die Gleichung $|z|^2 + r^2 = 1$. Daraus ergibt sich ein Homöomorphismus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \leftrightarrow \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \mid z_1 \neq 0\}.$$

   Die 2-Sphäre ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung der linken Seite und $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung der rechten Seite.

b) Zeigen Sie, dass $S^1 \to S^3 \xrightarrow{p} S^2$ ein Faserbündel ist. Verifizieren Sie dazu, dass auf der Menge $U_i := \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\}$ die Abbildung $h_i \colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1, (z_0, z_1) \mapsto ([z_0, z_1], z_i/|z_i|)$ eine Trivialisierung ist. Die Abbildung ist offenbar stetig. Die Umkehrabbildung ist

$$h_0^{-1} \colon ([z_0, z_1], z) \mapsto (z\,|z_0|\,, \frac{z_1}{z_0} z\,|z_0|) \quad \text{beziehungsweise} \quad h_1^{-1} \colon ([z_0, z_1], z) \mapsto (\frac{z_0}{z_1} z\,|z_1|\,, z\,|z_1|).$$

   Alle Abbildungen sind stetig.

c) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\pi_i(S^1) = 0$ für $i > 1$. Aus der langen exakten Sequenz des Faserbündels

$$\pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1)$$

   folgt deshalb, dass die Abbildung $S^3 \to S^2$ einen Isomorphismus in π_3 induziert.