Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux

WS 14/15

Lösung des 6. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 6.1 (Zopfautomorphismen)

Definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \colon F_n &\to F_n \\ s_j &\mapsto \begin{cases} s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} & j = i+1 \\ s_{i+1} & j = i \\ s_j & j \neq i, i+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Mit Satz 1.17 müssen wir nur verifizieren, dass $\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i$ für $|i-j| > 1$ und $\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1}$ für alle i. Die erste Relation ist einfach. Für die zweite überprüfen wir, dass

$$\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i (s_j) = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} (s_j)$$

für alle j. Auch dies ist wiederrum klar für $j \neq i, i+1, i+2$.

In den verbleibenden Fällen verifizieren wir, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i (s_i) &= s_{i+2} = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} (s_i) \\ \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i (s_{i+1}) &= s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} (s_{i+1}) \\ \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i (s_{i+2}) &= s_{i+2}^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} s_{i+2} = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} (s_{i+2}). \end{aligned}$$

In der Tat:

$$\begin{array}{c} s_i \\ s_{i+1} \\ s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_i}{\mapsto} \begin{array}{c} s_{i+1} \\ s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} \\ s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_{i+1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_i s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_i}{\mapsto} \begin{array}{c} s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} s_{i+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} s_i \\ s_{i+1} \\ s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_{i+1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_i \\ s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_i}{\mapsto} \begin{array}{c} s_{i+1} \\ s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i s_{i+1} s_{i+2} \end{array} \overset{\tilde{\sigma}_{i+1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} \\ s_{i+2}^{-1} s_{i+1}^{-1} s_{i+2} s_{i+2}^{-1} s_i s_{i+2} s_{i+2}^{-1} s_{i+1} s_{i+2} \end{array}$$

Aufgabe 6.2 (Lösung des Wortproblems)

Wir wenden sukzessive die Erzeuger an:

$$\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \overset{\sigma_2}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 \\ s_3 \\ s_3^{-1} s_2 s_3 \end{array} \overset{\sigma_1^{-1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 s_2 s_1^{-1} \\ s_3 \\ s_3^{-1} s_1 s_3 \end{array} \overset{\sigma_2}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 s_3 s_1^{-1} \\ s_3^{-1} s_2 s_3 \\ s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 s_1 s_3^{-1} s_2 s_3 \end{array} \overset{\sigma_1^{-1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 s_2 s_1^{-1} s_3 s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} \\ s_3^{-1} s_1 s_3 \\ s_3^{-1} s_1^{-1} s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_3 \end{array}$$

$$\overset{\sigma_2}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 s_3 s_1^{-1} s_3^{-1} s_2 s_3 s_1 s_3^{-1} s_1^{-1} \\ s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 s_1 s_3^{-1} s_2 s_3 \\ s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 s_1^{-1} s_3^{-1} s_2 s_3 s_1 s_3 s_1^{-1} s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 s_1 s_3^{-1} s_2 s_3 \end{array}$$

$$\overset{\sigma_1^{-1}}{\mapsto} \begin{array}{c} s_1 s_2 s_1^{-1} s_3 s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} \\ s_3^{-1} s_1^{-1} s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_3 \\ s_3^{-1} s_1^{-1} s_3 s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3 s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_3^{-1} s_1^{-1} s_3 s_1 s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 s_3 \end{array}$$

und stellen fest, dass $\chi(b)(s_i) \neq s_i$ für alle i.

Aufgabe 6.3 (Geschlossene Zöpfe und Zykel)

Wir nummerieren die Stränge entlang ihrer unteren Enden und betrachten $\bar{b}$ als Teilmenge von $D \times I/(x,0) = (x,1)$. Offenbar enthält jede Komponente von $\bar{b}$ einen der Punkte $[i,0,0]$. Wir behapten, dass $[i,0,0]$ und $[j,0,0]$ in $\bar{b}$ verbunden sind genau dann, wenn i und j im selben Zykel von $\pi(b)$ liegen. Ist $\pi(b)(i) = j$ so verbindet der $i$te Strang von b die Punkte $(i,0,1)$ und $(j,0,0)$ in b, also die Punkte $[i,0,0]$ und $[j,0,0]$ in $\bar{b}$. Sind umgekehrt die Punkte $[i,0,0]$ und $[j,0,0]$ in $\bar{b}$ verbunden, so gibt es eine Folge $i = i_0, \ldots, i_k = j$ so dass der $i_\ell$te Strang $(i_\ell, 0, 1)$ mit $(i_{\ell+1}, 0, 0)$ verbindet. Dann ist aber $\pi(b)(i_\ell) = i_{\ell+1}$ und i und j liegen im selben Zykel.

Aufgabe 6.4* (Armband)

Das Armband ist der geschlossene Zopf zu dem Zopf $b = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$. Es zerfällt im getragenen Zustand (also in $D \times S^1$) in zwei Komponenten genau dann, wenn $\bar{b}$ konjugiert ist zu einem Zopf $b' \in B_1 \times B_2 \cong B_2 \leq B_3$ (d.h. einem in dem der erste Strang nicht mit den anderen beiden interagiert). Für ein solches b' ist der Pfad in $D \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ der x_1 umläuft invariant unter $\chi(b')$. Wäre also b konjugiert zu b' so würde $\chi(b)$ ein Konjugat von s_1 festhalten. Wir können also formulieren, dass das Armband in zwei Komponenten zerfällt genau dann, wenn b konjugiert zu einem Element von B_2 ist genau dann wenn es ein Konjugat von s_1 festhält. Wie das zu entscheiden ist, ist nicht so klar.

Was man aber ausschließen kann ist, dass das Armband in drei Teile zerfällt, denn dazu müsste b konjugiert zum trivialen Zopf sein, also selbst trivial. Wir können aber nachrechnen, dass $\tilde{b}$ nicht trivial ist:

$$s_2 \overset{\tilde{\sigma}_2}{\mapsto} s_3 \overset{\tilde{\sigma}_1^{-1}}{\mapsto} s_3 \overset{\tilde{\sigma}_2}{\mapsto} s_3^{-1}s_2s_3 \overset{\tilde{\sigma}_1^{-1}}{\mapsto} s_3^{-1}s_1s_3 \overset{\tilde{\sigma}_2}{\mapsto} s_3^{-1}s_2^{-1}s_3s_1s_3^{-1}s_2s_3 \overset{\tilde{\sigma}_1^{-1}}{\mapsto} s_3^{-1}s_1^{-1}s_3s_1s_2s_1^{-1}s_3^{-1}s_1s_3.$$