Dr. S. Witzel
Prof. Dr. K.-U. Bux

WS 14/15

Lösung des 6. Übungsblatts zur Vorlesung Zopfgruppen

Aufgabe 6.1 (Quotientengruppen 1)

Man sieht unschwer, dass in G gilt $ad = 1$ (zum Beispiel, weil $(ad)^2 = ad$ und in einer Gruppe 1 das einzige idempotente Element ist). Somit ist $a = b^{-1}$ und G zyklisch von Ordnung 3. Also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, a, b, ab\} &\to \{1, a, b\} \\ 1, ab &\mapsto 1 \\ a &\mapsto a \\ b &\mapsto b. \end{aligned}$$

Das Element ab ist gemeinsames Rechtsvielfaches von allen Elementen in M. Rechtskürzbarkeit gilt nicht, denn $1 \cdot ab = ab \cdot ab$ aber $1 \neq ab$.

Aufgabe 6.2 (Gemeinsame Teiler und Vielfache) Bestimmen Sie in B_4^+

a) Es ist $\sigma_1 \vee \sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ (da auf kürzere Worte nur Relationen angewendet werden können, wenn sie σ_3 enthalten, was nichts bringt). Offensichtlich ist $\sigma_1 \vee \sigma_3 = \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$. Demnach ist

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \vee \sigma_2) \vee \sigma_3 &= \sigma_1(\sigma_2\sigma_1 \vee \sigma_3) \\ &= \sigma_1(\sigma_2(\sigma_1 \vee \sigma_3\sigma_2)) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3(\sigma_1 \vee \sigma_2) \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ &= \Delta_4. \end{aligned}$$

b) Durch anwenden der Relationen findet man, dass

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_3 \quad \text{und} \quad \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_1$$

Also ist $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$ ein gemeinsamer Linksteiler. Außerdem würde ein größerer Linksteiler durch Kürzen einen nichttrivialen gemeinsamen Linksteiler von σ_3^2 und σ_1^2 ergeben, der nicht existiert. Somit ist $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \wedge \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$.

Aufgabe 6.3 (Satz von Ore)

Es sei M ein Ore-Monoid und G die Gruppe der Rechtsbrüche von M.

a) Seien $[m, n], [r, s] \in G$. Um $[m, n] \cdot [r, s]$ zu berechnen wählen wir ein gemeinsames Vielfaches $nx = ry$. Wir berechnen

$$\tilde{\varphi}([m, n])\tilde{\varphi}([r, s]) = \phi(m)\phi(n)^{-1}\phi(r)\phi(s)^{-1}$$

und

$$\tilde{\varphi}([m, n] \cdot [r, s]) = \tilde{\varphi}([mx, sy]) = \varphi(mx)\varphi(sy)^{-1} = \varphi(m)\varphi(x)\varphi(y)^{-1}\varphi(s)^{-1}.$$

Nun ist $nx = ry$, also $\varphi(n)\varphi(x) = \varphi(r)\varphi(y)$ und somit $\varphi(x)\varphi(y)^{-1} = \varphi(n)^{-1}\varphi(r)$. Einsetzen ergibt die gewünschte Gleichung.

b*) Wir berechnen zunächst

$$([m,n]\cdot[p,q])[r,s] = [ma, qb]\cdot[r,s] = [mac, sd]$$

wobei (1) $na = pb$ und (2) $qbc = rd$. Außerdem ist

$$[m,n]([p,q]\cdot[r,s]) = [m,n]\cdot[pe, sf] = [mg, sfh]$$

wobei (3) $qe = rf$ und (4) $ng = peh$ ist. Wir wählen nun u und v so, dass (5) $gu = acv$ ist und wollen zeigen, dass $fhu = dv$ ist.
Zunächst ist

$$pehu \overset{(4)}{=} ngu \overset{(5)}{=} nacv \overset{(1)}{=} pbcv.$$

Wir kürzen (links!) p und erhalten (6) $ehu = bcv$. Wir bekommen dann

$$rfhu \overset{(3)}{=} qehu \overset{(6)}{=} qbcv \overset{(2)}{=} rdv.$$

Wir kürzen r und erhalten $fhu = dv$ wie gewünscht.

Aufgabe 6.4* (Quotientengruppen 2 (nach Malcev))

Betrachten Sie das Monoid $N := \langle a,b,c,d,u,v,x,y \mid ax = by, cx = dy, au = bv\rangle_M$.

a) Zeigen Sie, dass in N gilt $cu \neq dv$.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Monoid-Homomorphismus $\varphi\colon N \to H$ in eine Gruppe H gilt $\varphi(cu) = \varphi(dv)$.

c) Zeigen Sie, dass N rechtskürzbar ist (und folgern Sie, dass es keine gemeinsamen Rechtsvielfachen besitzt).

Hinweis: Berechnen Sie $\varphi(y)\varphi(x)^{-1}$. Die Erzeuger zerfallen in zwei Klassen und die Relationen erhalten die Klasse eines Buchstabens.