Dr. S. Witzel WS 15/16

Diskrete Mathematik

1. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P1.1 (Punkte im Quadrat)

Zeigen Sie: unter fünf beliebigen Punkten im Einheitsquadrat gibt es zwei die Abstand höchstens $1/\sqrt{2}$ haben.

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip

Aufgabe P1.2 (Äquivalenzrelationen und Partitionen)

Es sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für ein Element $x \in X$ bezeichnen wir mit $[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$ seine Äquivalenzklasse. Zeigen Sie:

Die Mengen $[x]$ für $x \in X$ sind nicht-leer, disjunkt und überdecken X. (*)

Eine Menge von Mengen, die (*) erfüllt heißt *Partition* von X. Wir haben also gesehen, dass $\{[x] \mid x \in X\}$ eine Partition von X ist.

Hinweis: Dass die Mengen $[x]$ disjunkt sind bedeutet nicht dass $[x] \cap [y] = \emptyset$ für $x \neq y$, sondern nur, dass $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

Aufgabe P1.3 (Eine überabzählbare Menge)

Für eine Menge X sei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. die Elemente von $\mathfrak{P}(X)$ sind die Teilmengen von X.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \precsim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \not\sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.
c) Folgern Sie, dass $\mathbb{N} \lnsim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Hinweis: Für (b) nehmen Sie an, es gäbe eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und betrachten Sie die Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.

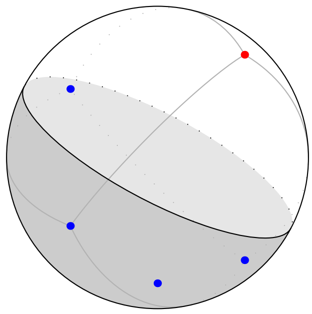
Hausübungen

Aufgabe H1.1 (Punkte und Schubladen)

a) Sei Δ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. Zeigen Sie, dass unter zehn beliebigen Punkten in Δ zwei sind, die Abstand höchstens $1/3$ haben.

b) Zeigen Sie: für beliebige fünf Punkte auf der zweidimensionalen Sphäre existiert eine abgeschlossene Hemisphäre, die vier davon enthält.
Die zweidimensionale Sphäre ist $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(2+2 Punkte)



Aufgabe H1.2 (Potenzmenge)

a) Sei X eine Menge. Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathfrak{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ an.

b) Bestimmen Sie $|\mathfrak{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right|$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe H1.3 (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Seien X und Y nichtleere, endliche Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie $|X| = \sum_{y \in Y} \left|f^{-1}(y)\right|$. Hier ist $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

b) Folgern Sie, dass wenn $|X| > m\,|Y|$, es $x_1, \ldots, x_{m+1}$ gibt mit $f(x_1) = \ldots = f(x_{m+1})$.

(2+1 Punkte)

Aufgabe H1.4 (Partitionen und Äquivalenzrelationen)

Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von X. Wir definieren die Relation $\approx$ durch $x \approx y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{P}. x, y \in B$.

a) Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass die Konstruktionen aus (a) und aus Aufgabe P1.2 invers zueinander sind.
Explizit: für eine eine Äquivalenzrelation $\sim$ sei $\mathcal{P}_\sim$ die Partition gemäß Aufgabe P1.2 und für eine Partition $\mathcal{Q}$ sei $\approx_\mathcal{Q}$ die Äquivalenzrelation gemäß (a). Zu zeigen ist, dass für jede Partition $\mathcal{Q}$ gilt $\mathcal{P}_{(\approx_\mathcal{Q})} = \mathcal{Q}$ und für jede Äquivalenzrelation $\sim$ gilt $\approx_{(\mathcal{P}_\sim)} = \sim$.

(2+2 Punkte)

Abgabe bis 30.10.2015.