

Diskrete Mathematik

2. Übungsblatt

Hausübungen

Aufgabe H2.1 (Inklusion–Exklusion)

Der Induktionsanfang ist trivial:

$$|X| = \sum_{j=1}^1 (-1)^2 |X|.$$

Für den Induktionsschritt setzen wir $A := X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} X_i \right| = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \quad \text{und} \\ |A \cap X_n| &= \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (X_i \cap X_n) \right| = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j} \cap X_n| \\ &= \sum_{j=2}^n (-1)^j \sum_{i_1 < \dots < i_{j-1} < i_j = n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \end{aligned}$$

Mit der Formel für Vereinigungen erhält man

$$\begin{aligned} |A \cup X_n| &= |X_n| + |A| - |A \cap X_n| \\ &= |X_n| + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j < n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| - \sum_{j=2}^n (-1)^j \sum_{i_1 < \dots < i_{j-1} < i_j = n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \\ &= \sum_{j=1}^n |X_j| + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j < n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_{j-1} < i_j = n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \\ &= \sum_{j=1}^n |X_j| + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j}| \end{aligned}$$