Dr. S. Witzel WS 15/16

Diskrete Mathematik

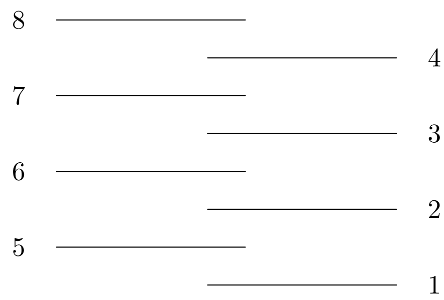
3. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P3.1 (Riffeln)

Riffeln (engl. riffle shuffle) ist die Methode, Karten zu mischen, bei der das Kartenspiel grob in zwei Hälften geteilt wird und die beiden Hälften ineinander gemischt werden. Hier interessieren wir uns für *perfektes Riffeln*: ein Kartenspiel von $2n$ Karten wird exakt zwei Hälften von n Karten geteilt und diese abwechselnd aufeinander sortiert, siehe Bild.

Wir oft müssen Sie Kartenspiel von 8 Karten perfekt riffeln, um es wieder in die Ausgangssituation zu bringen?



Aufgabe P3.2 (Polygone und Diedergruppen)

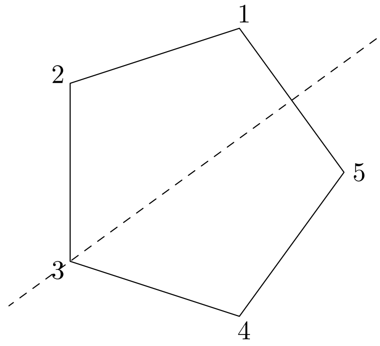
Wir betrachten die folgenden Elemente von S_5: $r = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $s = (2\ 5)(3\ 4)$, $t = (2\ 4)(3\ 5)$.

a) Welche davon sind Symmetrien des unten dargestellten Fünfecks?

b) Bestimmen Sie $r \cdot s \cdot r^{-1}$. Welches Produkt von r und s ergibt die Spiegelung an der gestrichelten Linie?

c) Die Diedergruppe D_5 ist die Gruppe aller Symmetrien des Fünfecks, die zyklische Gruppe C_5 ist die Gruppe der Drehsymmetrien. Bestimmen Sie $|D_5|$ und $|C_5|$.

d) Können Sie die obigen Aussagen verallgemeinern indem Sie 5 durch ein beliebiges n ersetzen?



Hausübungen

Aufgabe H3.1 (Riffeln)

a) Beschreiben Sie allgemein die Permutation des perfekten Riffelns von $2n$ Karten:

$$\pi(i) = \begin{cases} & \text{wenn} \\ & \text{wenn} \end{cases}$$

b) Wie oft müssen Sie ein Skatblatt (32 Karten) perfekt riffeln, um es wieder in die Ausgangssituation zu bringen? (Geben Sie die Zykeldarstellung der Permutation an.)

c*) Wie oft müssen Sie ein französisches Kartenspiel (52 Karten) perfekt riffeln, um es wieder in die Ausgangssituation zu bringen? (Geben Sie wieder die Zykeldarstellung an.)

(2 + 1 + 2* Punkte)

Aufgabe H3.2 (Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n > 0$. Wir wollen mit $\mathfrak{P}_k(X)$ die Menge der k-elementigen Teilmengen einer Menge X bezeichnen.

a) Sei $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge mit k Elementen. Welche natürliche Art gibt es, aus A eine Teilmenge von $\{1, \dots, n-1\}$ zu erhalten? Wieviele Elemente kann diese haben?

b) Überzeugen Sie sich, dass Sie in (a) eine bijektive Abbildung

$$\mathfrak{P}_k(\{1, \dots, n\}) \to \mathfrak{P}_{k-1}(\{1, \dots, n-1\} \cup \mathfrak{P}_k(\{1, \dots, n-1\})$$

beschrieben haben.

c) Folgern Sie die Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

(1 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe H3.3 (Lagrange)

a) Sei $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{kgV}(a_1, \dots, a_k)$ ein Teiler von $\mathrm{kgV}(1, \dots, n)$ ist und damit auch ein Teiler von $n!$ ist.

b) Beweisen Sie das Lemma von Lagrange für die symmetrische Gruppe. Das heißt, zeigen Sie, dass für jedes $g \in S_n$ die Ordnung $|g|$ ein Teiler von $n!$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie Lemma 1.3.5

(1 + 2 Punkte)

Aufgabe H3.4 (Konjugation)

Wir betrachten die folgenden Elemente von S_8: $g = (1\ 3\ 5)(2\ 8\ 4\ 6)$ und $h = (2\ 5\ 6\ 7)(1\ 4)(3\ 8)$

a) Berechnen Sie $g \cdot h$ und g^{-1}.

b) Berechnen Sie $g \cdot h \cdot g^{-1}$. Was fällt Ihnen im Vergleich zu h auf?

c) Beweisen Sie Ihre Beobachtung für beliebige Elemente g und h.

(1+1+2 Punkte)

Abgabe bis 13.11.2015.