# Diskrete Mathematik

## 4. Übungsblatt

## Präsenzübungen

**Aufgabe P4.1** (Unterscheidbarkeit von Färbungen)

Die Menge der Abbildungen $\{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$ können wir z.B. betrachten als die Menge der Arten, $k$ Objekte in $n$ Farben zu färben. Auf dieser Menge betrachten wir vier verschiedene Äquivalenzrelationen:

a) trivial: eine Abbildung ist äquivalent nur zu sich selbst.

b) Farben unwichtig/nicht unterscheidbar: $f \sim_F f'$ wenn ein $g \in S_n$ existiert mit $g \circ f = f'$.

c) Objekte unwichtig/nicht unterscheidbar: $f \sim_O f'$ wenn ein $h \in S_k$ existiert mit $f \circ h = f'$.

d) Farben und Objekte unwichtig/nicht unterscheidbar: $f \sim_{FO} f'$ wenn ein $g \in S_n$ und ein $h \in S_k$ existiert mit $g \circ f \circ h = f'$.

Diskutieren Sie, die Menge welcher Abbildungen bis auf welche Äquivalenzrelation die folgenden Probleme modellieren.

a) 19 Spieler sollen in zwei Teams eingeteilt werden.

b) 10 Bonbons sollen auf drei Kinder aufgeteilt werden.

c) 100 Äpfel sollen auf vier Körbe verteilt werden.

d) Aus einem Sack mit 15 Bällen sollen vier herausgenommen werden.

e) Unter den 1000 Einsendungen für ein Glücksspiel sollen die 5 Gewinner je eines 100 Euro Gutscheins gezogen werden.

f) Unter den 1000 Einsendungen für ein Glücksspiel sollen die Gewinner eines Cabrios, einer Reise und eines Staubsaugers gezogen werden.

**Aufgabe P4.2** (Transpositionen)

Eine *Transposition* ist ein Element $\sigma \in S_n$, das genau zwei Punkte $k, \ell \in \{1,\ldots,n\}$ $(k \neq \ell)$ vertauscht und alle anderen festhält. Das heißt, die Zykelschreibweise ist $\sigma = (k\ \ell)$.

a) Verifizieren Sie, dass für jede Transposition $\sigma$ gilt $\sigma^2 = \mathrm{id}$, also $\sigma = \sigma^{-1}$.

b) Finden Sie für ein beliebiges $g \in S_n$ eine Transposition $\sigma$, so dass $(\sigma \circ g)(n) = n$.

c) Zeigen Sie per Induktion, dass sich jedes $g \in S_n$ als Produkt von höchstens $n$ Transpositionen schreiben lässt.

d) Zeigen Sie, dass eine Transposition nicht als Produkt von zwei Transpositionen geschrieben werden kann. Folgern Sie, dass $g \in S_n$ nur entweder ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen oder einer ungeraden Anzahl Transpositionen sein kann. Entsprechend bezeichnen wir $g$ als *gerade* oder *ungerade*

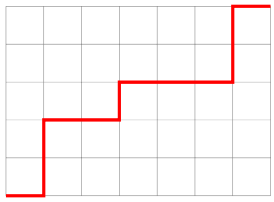
e) Finden Sie heraus, welche Elemente von $S_3 = D_3$ gerade und welche ungerade sind.

## Hausübungen

**Aufgabe H4.1** (Monotone Abbildungen)

Eine Abbildung $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{0,\dots,m\}$ heißt *monoton* wenn $i \le j \Rightarrow f(i) \le f(j)$. Bestimmen Sie die Anzahl der monotonen Abbildungen $\{1,\dots,n\} \to \{0,\dots,m\}$.

*Hinweis:* Überlegen Sie, wie eine monotone Abbildung durch einen Pfad im $n \times m$-Gitter kodiert werden kann (und damit als Menge der $n$ Schritte nach rechts in der Menge aller $n+m$ Schritte). **(3 Punkte)**



Der Fall $n = 7$, $m = 5$.

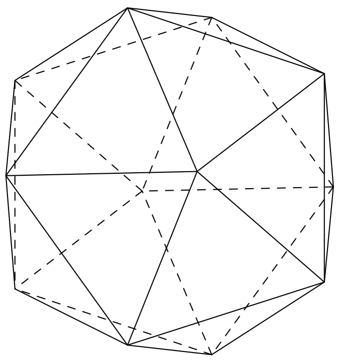
**Aufgabe H4.2** (Ikosaeder)

a) Wieviele Ecken hat ein Ikosaeder?

b) Wieviele Symmetrien des Ikosaeders gibt es, die eine bestimmte Ecke festhalten?

c) Benutzen Sie die Bahnformel (Lemma 1.3.9) um die Anzahl der Symmetrien des Ikosaeders bestimmen.

**(1+2+1 Punkte)**



**Aufgabe H4.3** (Zahlpartitionen)

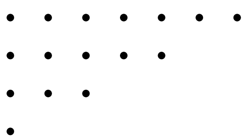
Wir bezeichnen mit $P_n^m$ die Anzahl der Zahlpartitionen von $n$ deren größter Summand $m$ ist.

a) Listen Sie alle 15 Partitionen von 7 auf.

b) Zeigen Sie, dass $P_n^m = P_{n,m}$.

c) Zeigen Sie, dass $P_n = \sum_{i=1}^n P_n^i$ und $P_n^m = \sum_{i=1}^m P_{n-m}^i$.

**(1+2+2 Punkte)**



Eine Partition von 16 – oder eine andere.

**Aufgabe H4.4** (Trinomialkoeffizienten)

Wir betrachten $n, k, \ell, m \in \mathbb{N}$, so dass $n = k + \ell + m$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Menge $\{1, \dots, n\}$ in disjunkte Teilmengen $A$, $B$, $C$ zu partitionieren, so dass $|A| = k$, $|B| = \ell$, $|C| = m$?

*Hinweis:* Zwei Möglichkeiten: wählen Sie zunächst $A \cup B$ aus $\{1, \dots, n\}$ und dann $A$ aus $A \cup B$. Oder permutieren Sie $(1, \dots, n)$, teilen Sie es in Stücke der Länge $k$, $\ell$, $m$ und berücksichtigen Sie Mehrfachzählungen. **(3 Punkte)**

**Abgabe bis 20.11.2015.**