Diskrete Mathematik

5. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P5.1 (Kaninchen)

Die Fibonacci-Zahlen beschreiben ein Bevölkerungsmodell von Kaninchen, die nie sterben. Wir wollen das Modell wie folgt modifizieren: im ersten Monat nach der Geburt wird ein Kaninchen geschlechtsreif, im zweiten und dritten Monat nach der Geburt bekommt es jeweils einen Nachkommen, allerdings stirbt es bei der Geburt des zweiten Nachkommen selbst.

Die Anzahl der Kaninchen im Monat n in diesem Modell ist gegeben durch die Folge von Zahlen N_n die rekursiv definiert ist durch

$$N_0 = N_1 = 0, N_2 = 1, N_{n+3} = N_{n+2} + N_{n+1} - N_n.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M, so dass

$$M \cdot (N_n, N_{n+1}, N_{n+2})^T = (N_{n+1}, N_{n+2}, N_{n+3})^T.$$

b) Schreiben Sie $M = AJA^{-1}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von M sind (diese Matrix heißt *Jordan-Normalform* von M. Eine Matrix kann immer in diese Form überführt werden, auch wenn sie nicht diagonalisierbar ist). Da M nicht diagonalisierbar ist, gibt es keine drei linear unabhängigen Eigenvektoren. Stattdessen sind die Spalten von A Lösungen der Gleichungen

$(M - \lambda_1 I)v_1 = 0$, $\quad (M - \lambda_2 I)v_2 = 0$ (die beiden Eigenvektoren) und $\quad (M - \lambda_2 I)w_2 = v_2$.

c) Geben Sie eine allgemeine Formel für $N_n = (1, 0, 0) \cdot AJ^nA^{-1} \cdot (0, 0, 1)^T$ an. Warum verdient diese Folge keinen eigenen Namen?

Aufgabe P5.2 (Identität von Cassini)

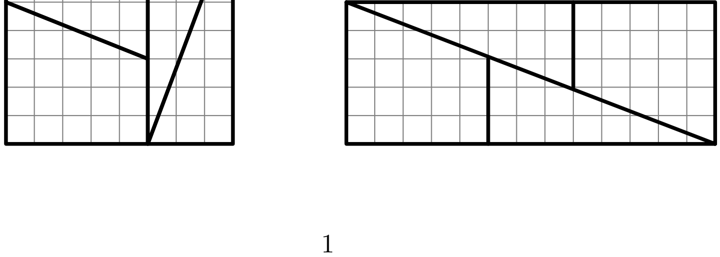
a) Die Identität von Cassini besagt dass für alle ganzen Zahlen n gilt

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Beweisen Sie die Identität per Induktion.

b) Können Sie die magische Flächengleichheit der beiden Rechtecke unten mit Flächeninhalt $8^2 = 64$ und $5 \cdot 13 = 65$ entlarven, indem Sie den Trick für 3^2 und $2 \cdot 5$ nachahmen?

Hinweis: (a) Nutzen Sie für den Induktionsschritt die Ersetzungen $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ und $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$.



Hausübungen

Aufgabe H5.1 (Potenzen des goldenen Schnitts)

Wir bezeichnen den goldenen Schnitt mit ϕ. Zeigen Sie, dass für alle ganzen Zahlen n gilt

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Binets Formel oder Induktion (in zwei Richtungen!). Benutzen Sie für die Induktion nicht den expliziten Ausdruck $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sondern die definierende Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe H5.2 (Farberhaltende Symmetrien)

Wir erinnern uns, dass die Diedergruppe D_n die Gruppe der Symmetrien eines regelmäßigen n-Ecks ist und die zyklische Gruppe C_n die Gruppe seiner Drehsymmetrien.

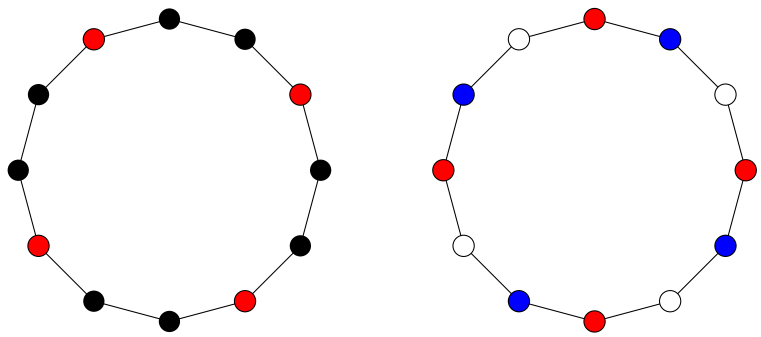
Im Bild unten sind die Ecken eines Zwölfecks auf zwei verschiedene Arten gefärbt.

a) Geben Sie für beide Färbungen an, welche Symmetrien in D_{12} die Färbung erhalten, d.h. Ecken auf Ecken mit der gleichen Farbe abbilden.

b) Welche Diedergruppen bzw. zyklischen Gruppen erkennen Sie darin wieder?

c) Finden Sie Färbungen des Zwölfecks, die von anderen Gruppen erhalten werden.

(1+2+2 Punkte)



Aufgabe H5.3 (Wölfe, Schafe, Skorpione)

In der Ausgabe 08/2015 der Bahn-Zeitschrift „Mobil" erschien folgendes Rätsel.

Wir wollen als Bezugspunkt den vierten Tag wählen. Die Problemstellung im Original ist also, wie viele Tiere von jeder Art das Tal vor drei Tagen bevölkerten. Wir möchten für beliebiges n herausfinden, wie viele Tiere von jeder Art das Tal vor n Tagen bevölkerten. Wir betrachten die Bevölkerung jeweils als einen Vektor

$$\begin{pmatrix} \text{Wölfe} \\ \text{Schafe} \\ \text{Skorpione} \end{pmatrix}$$

a) Dass jeder Wolf zwei Schafe frisst kann durch die Matrix $M_{9:00} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ausgedrückt werden. Bestimmen Sie analog die Matrizen $M_{12:00}$ für „Schafe zertreten Skorpione" und $M_{18:00}$ für „Skorpione stechen Wölfe". Die Matrix $M = M_{18:00} \cdot M_{12:00} \cdot M_{9:00}$ berechnet aus der Bevölkerung eines Morgens die Bevölkerung des folgenden Morgens: $v_{i+1} = M \cdot v_i$.

b) Bestimmen Sie $R := M^{-1}$. (Die Bevölkerung die uns interessiert ist also $R^n \cdot (1,0,0)^T$ (die erste Spalte von R^n).) Sie können Ihr Ergebnis für R kontrollieren mithilfe von

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von R. Wenn Λ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten in aufsteigender Reihenfolge ist, gilt $R = V \Lambda V^{-1}$ wobei

$$V = \begin{pmatrix} -1 & \phi & 1/\phi \\ -1 & 1/\phi & \phi \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \phi^2 & -\phi & 1 \\ \phi^{-2} & 1/\phi & 1 \end{pmatrix}$$

d) Geben Sie einen einfachen Ausdruck für Bevölkerung des Tals am Morgen vor n Tagen an.

Hinweis: (b) Die Matrizen $M_{9:00}$, $M_{12:00}$ und $M_{18:00}$ sind sehr leicht zu invertieren. Das können Sie ausnutzen um R zu berechnen. (c) Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist leicht zu erraten, schreiben Sie die anderen beiden als Potenzen von ϕ (benutzen Sie Aufgabe H5.1).

(2+2+2+2 Punkte)

Abgabe bis 27.11.2015.