Diskrete Mathematik

Lösungen zum 5. Übungsblatt

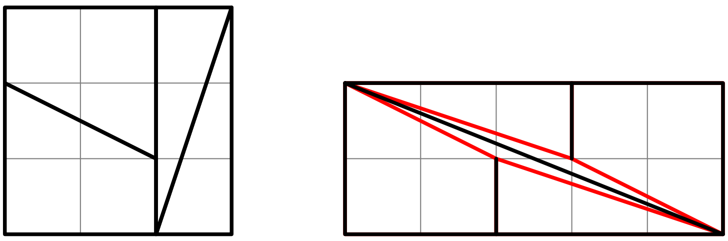
Aufgabe P5.1 (Kaninchen)

a)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

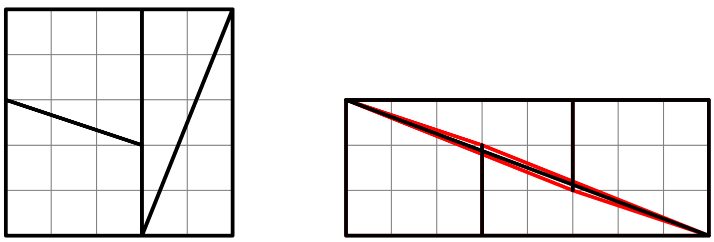
b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c) Zunächst ist
$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
also ist
$$\begin{aligned}(1,0,0) \cdot AJ^nA^{-1} \cdot (0,0,1)^T &= \frac{1}{4}(1,1,0) \cdot J^n \cdot (1,-1,2)^T = \frac{1}{4}(1,1,0) \cdot ((-1)^n, -1+2n, 2)^T \\ &= \frac{(-1)^n - 1 + 2n}{4} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2n}{4} & n \text{ gerade} \\ \frac{2n+2}{4} & n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = \lceil n/2 \rceil\end{aligned}$$

Aufgabe P5.2 (Identität von Cassini)



$5 \cdot 2 - 3^2 = +1$



$8 \cdot 3 - 5^2 = -1$

Hausübungen

Aufgabe H5.1 (Wölfe, Schafe, Skorpione)

a) Die Matrizen sind

$$M_{9:00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{12:00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M_{18:00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Inversen von $M_{9:00}$, $M_{12:00}$ und $M_{18:00}$ erhält man, indem man jeweils -2 durch 2 ersetzt. Damit berechnet man

$$R = M^{-1} = (M_{18:00}M_{12:00}M_{9:00})^{-1} = M_{9:00}^{-1}M_{12:00}^{-1}M_{18:00}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Das charakteristische Polynom von R ist $\chi(X) = X^3 - 3X^2 - 5X - 1$. Durch Ausprobieren findet man die Nullstelle -1. Polynomdivision ergibt $\chi(X)/(X+1) = X^2 - 4X - 1$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Diese kann man ausdrücken als $1 + 2\phi$ und $1 - 2/\phi$, was nach der Übung ... gerade ϕ^3 und $-\phi^{-3}$ sind. Demnach ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \phi^3 \end{pmatrix}$$

d) Wir rechnen

$$\begin{aligned} R^n \cdot (1,0,0)^T = V\Lambda^n V^{-1}(1,0,0)^T &= \frac{1}{\sqrt{5}} V\Lambda^n \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ \phi^2 \\ \phi^{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} V \begin{pmatrix} (-1)^n\sqrt{5} \\ (-1)^n\phi^{2-3n} \\ \phi^{3n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{3n-3} + (-1)^n\phi^{3-3n}) - (-1)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{3n-1} + (-1)^n\phi^{1-3n}) - (-1)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{3n-2} + (-1)^n\phi^{2-3n}) + (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{3n-3} - (-1)^n \\ F_{3n-1} - (-1)^n \\ F_{3n-2} + (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit eine Anwendung von Binets Formel ist.