Diskrete Mathematik

6. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P6.1 (Rekursion)

Verwenden Sie erzeugende Funktionen um eine geschlossene Form für d_n zu finden wobei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert ist durch $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_n = -d_{n-1} + 2d_{n-2}$, $n \geq 2$.

Aufgabe P6.2 (Konvolution)

Die Konvolution zweier Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i})_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Überzeugen Sie sich, dass die Erzeugende Funktion der Konvolution zweier Folgen das Produkt ihrer erzeugenden Funktionen ist.

b) Finden Sie einen Ausdruck in geschlossener Form für $\sum_{i=0}^{n} F_i F_{n-i}$.

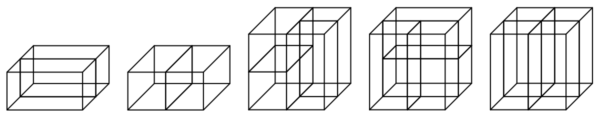
Hausübungen

Aufgabe H6.1 (Bestimmen von Rekursionen)

Welche Rekursion beschreibt die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unten? Begründen Sie jeweils Ihre Behauptung.

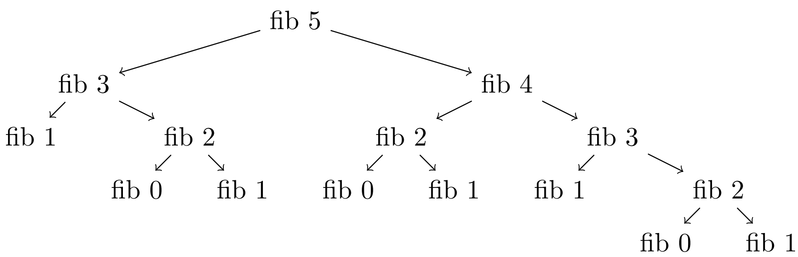
a) Die Anzahl der Worte a_n in $\{0,1,2\}^n$ ohne zwei aufeinanderfolgende 0en.

b) Die Anzahl b_n der Türme der Größe $2\times 2\times n$, die sich aus Bauklötzen der Größe $1\times 1\times 2$ bauen lassen.



c) Die Anzahl c_n der Aufrufe von `fib` die zur Auswertung von `fib n` nötig sind.

```
fib :: Int -> Integer
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = (fib (n - 1)) + (fib (n - 2))
```



(2+3+2 Punkte)

Aufgabe H6.2 (Lösen von Rekursionen)

Lösen Sie die Rekursion $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $n \geq 3$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Interpretieren Sie die Rekursion als Gleichung ihrer erzeugenden Funktion.

b) Lösen Sie die Gleichung nach der erzeugenden Funktion auf.

c) Lösen Sie die Gleichung indem Sie eine Partialbruchzerlegung durchführen.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe H6.3 (Manipulation von erzeugende Funktionen)

Wir wählen feste Zahlen $k, m \in \mathbb{N}$. In dieser Aufgabe wollen wir die erzeugenden Funktionen der Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmen wobei

$$f_n = \binom{m+n}{n} \quad \text{und} \quad g_n = \binom{k}{n}$$

a) Zeigen Sie per Induktion, dass $\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$ die erzeugende Funktion der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

b) Die Konvolution von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und welcher Folge ergibt die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Was ist ihre (extrem einfache) erzeugende Funktion?

c) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Sie benötigen nur die Aussage von Aufgabe P6.2(a). **(2+2+1 Punkte)**

Abgabe bis 4.12.2015.