Diskrete Mathematik

7. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P7.1 (Teilbarkeit) Eine Ordnung ist eine Relation $\leq$ auf einer Menge A, die die folgenden Axiome erfüllt: für $a, b, c \in A$ gilt:

- Reflexivität: $a \leq a$.
- Antisymmetrie: wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.
- Transitivität: wenn $a \leq b$ und $b \leq c$, dann $a \leq c$.

Das Hasse-Diagramm ist eine visuelle Darstellung endlicher Ordnungen. Man ordnet dazu die Elemente von A so an, dass a unterhalb von b steht wenn $a \leq b$. Man a und b mit einer Linie wenn außerdem (also neben $a \leq b$) auch noch gilt, dass es kein c gibt mit $a \leq c \leq b$.

a) Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation $a \mid b$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist.

b) Welches ist das kleinste, welches das größte Element bezüglich $\mid$?

c) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf den Teilern von 90. Woran erkennen Sie Primteiler, woran Primpotenzen?

Aufgabe P7.2 (Rationale Zahlen)

Zeigen Sie, dass jede Dezimalentwicklung einer rationalen Zahl p/q ($1 < q$ und der Einfachheit halber $0 \leq p < q$) periodisch ist. Geben Sie eine Schranke für die Länge der Periode an.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst ein Beispiel, wie 3/7.

Hausübungen

Aufgabe H7.1 (Reflektierte Polynome)

Wenn $P(z)$ ein Polynom vom Grad d ist bezeichnet man das Polynom $z^d Q(1/z)$ als das *reflektierte Polynom* von P.

a) Bestimmen Sie das reflektierte Polynom von $P(z) = 1 - 9z + 23z^2 - 15z^3$ und von $(1-z)(1-3z)(1-5z)$ ohne auszumultiplizieren.

b) Zeigen Sie: um ein Polynom $P(z) = 1+az+bz^2+cz^3$ in der Form $(1-\alpha z)\cdot(1-\beta z)\cdot(1-\gamma z)$ zu schreiben, kann man α, β, γ bestimmen als Nullstellen des reflektierten Polynoms P.

c) Nutzen Sie, was Sie gerade herausgefunden haben, um die Gleichung

$$\frac{1}{1+2z-3z^2} = \frac{r}{1-\alpha z} + \frac{s}{1-\beta z}$$

zu lösen.

d*) Welche Bedingung muss ein Polynom P erfüllen, damit das reflektierte Polynom des reflektierten Polynoms von P wieder P ist?

(1+2+1+2* Punkte)

Aufgabe H7.2 (Tests für Teilbarkeit)

a) Zeigen Sie, dass eine Zahl $a_n \ldots a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i$ durch 11 teilbar ist genau dann, wenn ihre alternierende Quersumme $\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot a_i$ durch 11 teilbar ist.

b) Leiten Sie den folgenden Test für Teilbarkeit durch 7 her: eine vierstellige Zahl $a_3a_2a_1a_0$ ist durch 7 teilbar genau dann, wenn $a_0 - a_3 + 3a_1 + 2a_2$ durch 7 teilbar ist.

c) Zeigen Sie genauso, dass $a_3a_2a_1a_0$ durch 13 teilbar ist genau dann, wenn $a_0 - a_3 - 3a_1 - 4a_2$ durch 13 teilbar ist.

d) Nutzen Sie die Teilbarkeitsregeln um zu überprüfen durch welche Primzahlen < 17 die Zahl 2016 teilbar ist.

(2+1+1+1 Punkte)

Aufgabe H7.3 (Nochmal riffeln)

Seien $s, h \in \mathbb{N}$, $s, h \geq 2$. Wir bezeichnen als (s,h)-riffeln die folgende Verallgemeinerung von perfektem riffeln:

Ein Stapel von $n = s \cdot h$ Karten (nummeriert von 0 bis $n-1$) wird reihum auf s Stapel verteilt (jeder Stapel hat am Ende eine Höhe von h Karten). Danach werden die Stapel in derselben Reihenfolge aufeinander gestapelt, in der sie ausgeteilt wurden. Wir sehen, dass $(s,2)$-riffeln gewöhnliches perfektes riffeln von $2s$ Karten ist. Außerdem haben wir in der Vorlesung nach Beobachtung I.3.3 das Beispiel von $(3,4)$-riffeln betrachtet (anders nummeriert).

a) Überlegen Sie sich, dass die Karten 0 und $n-1$ ihre Position im Stapel nicht verändern und geben Sie für die restlichen Karten eine Kongurenz modulo $n-1$ an, die die Position b der Karte a im Stapel nach dem Mischen beschreibt:

$$b \equiv \underline{\qquad} a \underline{\qquad} \mod n-1.$$

b) Zeigen Sie, dass (s,h)-riffeln und (h,s)-riffeln zueinander invers sind. Das heißt, wenn Sie ein Kartenspiel zuerst (s,h)-riffeln und das Ergebnis (h,s)-riffeln, ist das Kartenspiel wieder in seiner ursprünglichen Reihenfolge.

(3+2 Punkte)

Abgabe bis 11.12.2015.