

Diskrete Mathematik

11. Übungsblatt

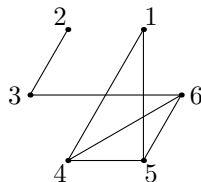
Präsenzübungen

Aufgabe P11.1 (Adjazenzmatrix)

Sei G ein Graph mit $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Die Adjazenzmatrix von G ist die $n \times n$ -Matrix A mit

$$A_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } vw \in E(G) \\ 0 & \text{wenn } vw \notin E(G). \end{cases}$$

- Was ist die Adjazenzmatrix des Graphen G der unten dargestellt ist?
- Was ist die Bedeutung von $(A^k)_{v,w}$ (dem (v, w) -Eintrag von A^k)?
- Können Sie im Beispiel von G die Werte von $(A^k)_{1,2}$ für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ voraussagen ohne die Matrizen zu multiplizieren?
- Beschreiben Sie für einen beliebigen Graph und eine Ecke v die Werte $(A^k)_{v,v}$, $k \in \mathbb{N}$.



Hausübungen

Aufgabe H11.1 (Doppeltes Abzählen)

Die Pyramidenzahlen sind definiert durch

$$P_n := \sum_{i=1}^n i^2.$$

Wir wollen eine geschlossene Formel für Sie herleiten. Dazu zählen wir die Elemente der Menge

$$K_n = \{(x, y, z) \in \{1, \dots, n+1\}^3 \mid x, y < z\}$$

auf zwei Arten.

- Schreiben Sie $K_n = \bigcup_{z=1}^n \dots$ und folgern Sie, dass $|K_n| = P_n$.
- Beobachten Sie, dass

$$K_n = \bigcup_{A \in \mathfrak{P}_2(\{1, \dots, n+1\})} \{(x, y, z) \in K_n \mid \{x, y, z\} = A\} \cup \bigcup_{A \in \mathfrak{P}_3(\{1, \dots, n+1\})} \{(x, y, z) \in K_n \mid \{x, y, z\} = A\}$$

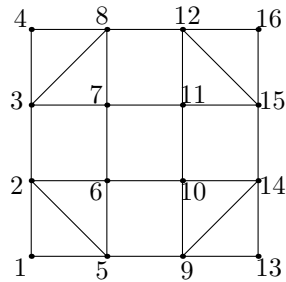
und folgern Sie eine Formel für P_n als Linearkombination von zwei Binomialkoeffizienten.

Hinweis: Teil (b) können Sie lösen wenn Sie folgende Fragen beantworten können: wieviele Tupel (x, y, z) mit $x, y < z$ gibt es, so dass $\{x, y, z\} = \{1, 2\}$, und wieviele gibt es, so dass $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$?

(2+3 Punkte)

Aufgabe H11.2 (Eulersche Kreise)

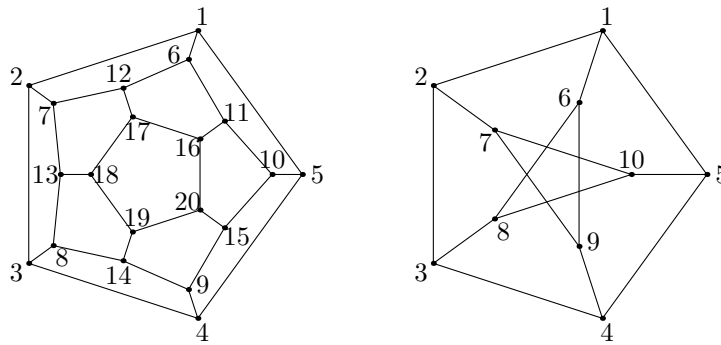
Nutzen Sie den Algorithmus aus der Vorlesung (Beweis des Satzes über Euler-Kreise) um einen Eulerschen Graph im unten angegebenen Graph zu finden.



(4 Punkte)

Aufgabe H11.3 (Hamiltonsche Kreise)

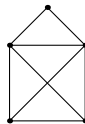
Geben Sie für jeden der beiden folgenden Graphen entweder einen hamiltonschen Kreis an oder zeigen Sie, dass es keinen gibt:



(2+2 Punkte)

Aufgabe H11.4 (Eulersche Pfade zählen)

Bestimmen Sie die Anzahl der eulerschen Pfade im Haus vom Nikolaus (s.u.). Überlegen Sie sich dazu, wieviele Wahlmöglichkeiten Sie an jeder Ecke haben, wenn Sie sie zum ersten Mal durchlaufen, und wieviele, wenn Sie sie zum zweiten Mal durchlaufen.



(3 Punkte)

Abgabe bis 29.1.2016.