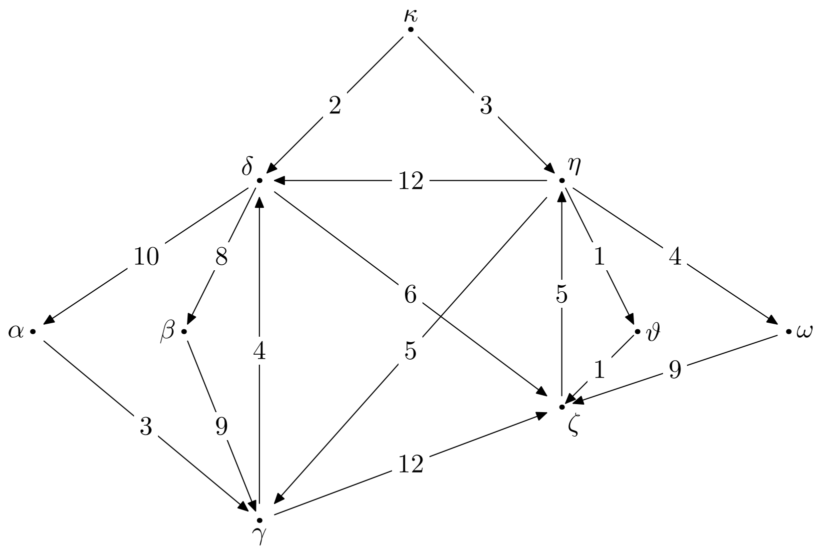
Diskrete Mathematik

12. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P12.1 (Gerichtete Graphen)

Formulieren Sie Dijkstras Algorithmus für gerichtete metrische Graphen (überlegen Sie sich dazu, was ein gerichteter metrischer Graph sein soll). Was ändert sich im Vergleich zu ungerichteten Graphen? Bestimmen Sie im Graph unten einen kürzesten Weg von α nach ω und von ω nach α. Was fällt Ihnen auf? Was ist speziell an κ? Wo treten im Alltag kürzeste Wege-Probleme mit gerichteten Graphen auf?



Hausübungen

Aufgabe H12.1 (Pfad-Summe)

Diese Aufgabe ist ein Teilproblem von Problem 18 auf Project Euler (`projecteuler.net`).

Wenn man im folgenden Dreieck oben anfängt und sich jeweils zu einer der beiden Zahlen darunter bewegt, ist die maximale Summe an Zahlen die man durchläuft 23.

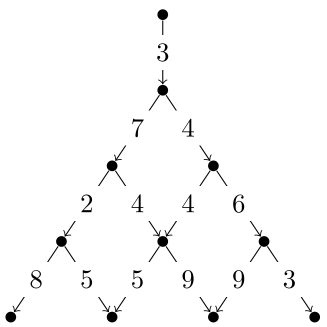
3
7 4
2 4 6
8 5 9 3

Hier ist $3 + 7 + 4 + 9 = 23$.

Finden Sie die maximale Summe im Dreieck unten; zeichnen Sie auch den Pfad ein, entlang dem Sie angenommen wird.

75
95 64
17 47 82
18 35 87 10
20 04 82 47 65
19 01 23 75 03 34
88 02 77 73 07 63 67
99 65 04 28 06 16 70 92

Hinweis: Adaptieren Sie Dijkstras Algorithmus um den längsten Weg in diesem gerichteten Graphen zu finden:



(4 Punkte)

Aufgabe H12.2 (Reduktion)

Die Kantenlängen in einem metrischen Graphen sind rationale Zahlen. Zeigen Sie, dass sich das kürzeste Wege Problem in ein äquivalentes Problem mit ganzzahligen Kantenlängen überführen lässt. **(3 Punkte)**

Aufgabe H12.3 (Metrische Graphen)

Auf einem metrischen Graphen G haben wir den Abstand zweier Ecken v, w definiert durch

$$d(v,w) := \min_{\substack{\gamma \text{ Kantenzug} \\ \text{von } v \text{ nach } w}} \ell(\gamma)$$

wobei

$$\ell(x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \dots x_{k-1} e_k x_k) = \sum_{i=1}^{k} \ell(x_i).$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $V(G)$ ist, d.h. zeigen Sie dass gilt

a) $d(v,v) = 0$ und $d(v,w) > 0$ für $v, w \in V(G)$ mit $v \neq w$.

b) $d(v,w) = d(w,v)$ für $v, w \in V(G)$.

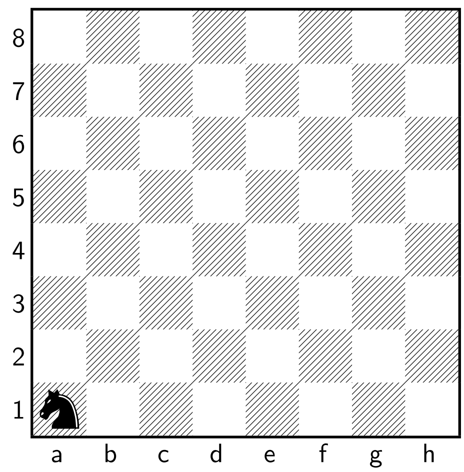
c) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ für $u, v, w \in V(G)$.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe H12.4 (Springer)

Im Schach darf der Springer auf eines der Felder ziehen, die seinem Standfeld am nächsten liegen von den Feldern, die nicht auf gleicher Reihe, Linie oder Diagonale mit dem Standfeld liegen.

Verwenden Sie Dijkstras Algorithmus um einen kürzesten Weg eines Springers vom Feld a1 zum Feld h8 anzugeben.



(3 Punkte)

Aufgabe H12.5* (Dijkstra)

Implementieren Sie Dijkstras Algorithmus um folgendes Problem zu Lösen. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den metrischen Graph G_n mit $V(G_n) = \{1, \dots, n\}$, $E(G_n) = \mathfrak{P}_2(V(G_n))$ (d.h. G ist vollständig) und $\ell(v,w) = |\sin(v \cdot w)|$ (wobei der Sinus in Bogenmaß ausgewertet wird). Implementieren Sie die Funktion `short_path`(n) die den kürzesten Weg in G_n von 1 nach n ausgibt.

Beispiel: Eingabe: `short_path(30)`

Ausgabe: `1, 22, 2, 11, 30` **(8* Punkte)**

Abgabe bis 5.2.2015.