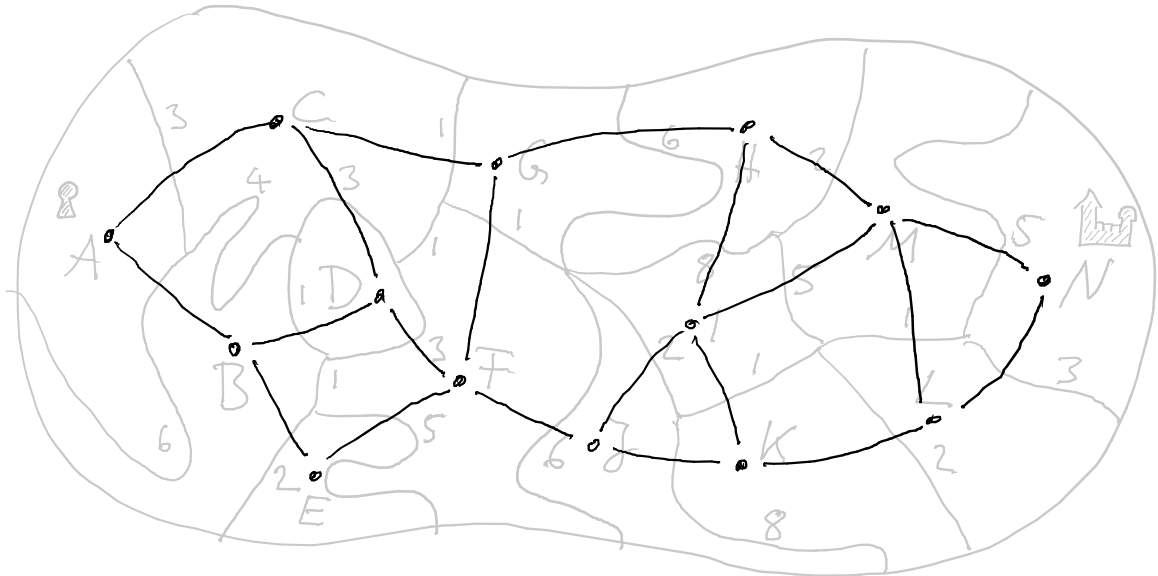


# Diskrete Mathematik

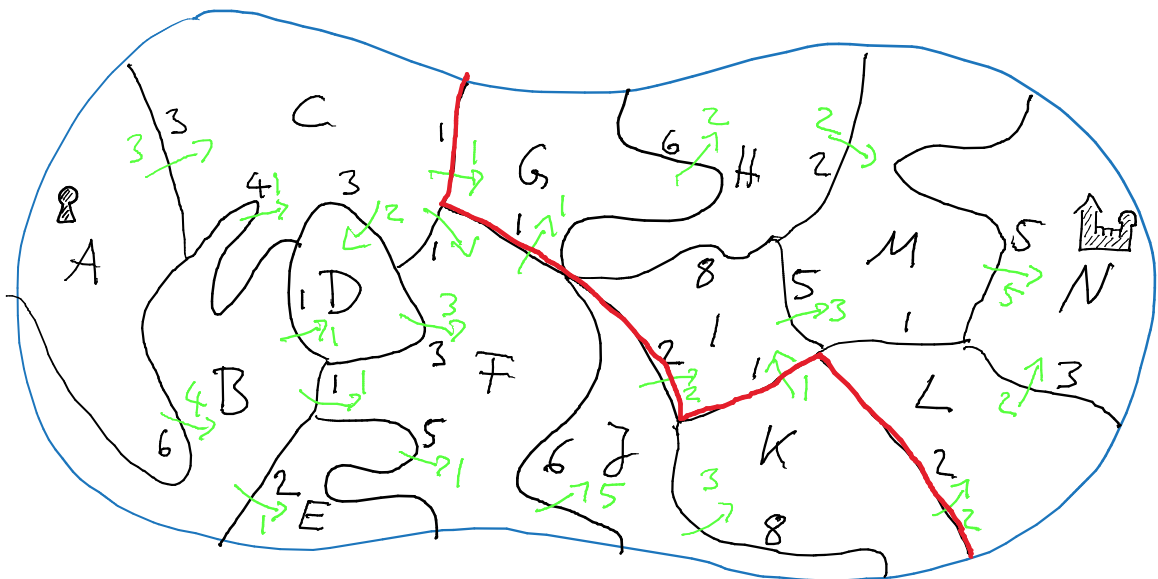
## Lösungen zum 13. Übungsblatt

### Aufgabe P13.1 (Abecea)

Das für dieses Problem relevante Netzwerk hat als Ecken die Herzogtümer und als Kanten die Grenzabschnitte. Die Kapazität eines Grenzabschnitts (in beide Richtungen) ist die Anzahl der Grenzübergänge:

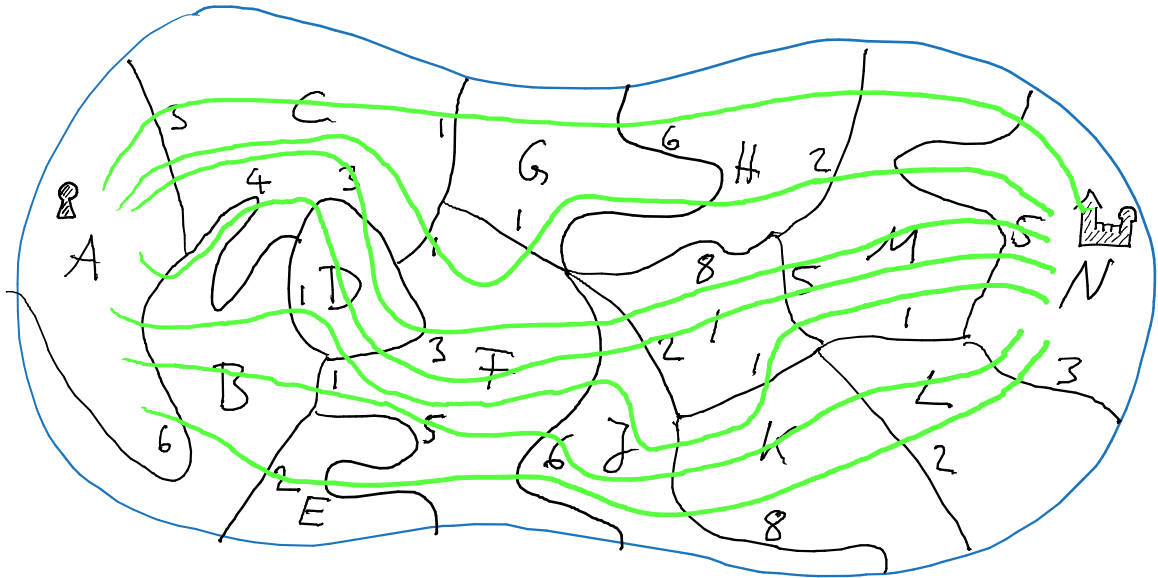


Das Problem ist, in diesem Netzwerk einen minimalen Schnitt zu finden. Getreu der Idee, dass nicht jeder Graph auch explizit als solcher dargestellt werden muss, lösen wir das Problem in der ursprünglichen Zeichnung. Eine Anwendung des max-flow-min-cut-Algorithmus ergibt zum Beispiel den folgenden Fluss und Schnitt:



Die rote Linie zeigt die Grenzabschnitte die zu schließen sind. Wir sehen, dass insgesamt sieben Grenzübergänge geschlossen werden müssen. Die Minimalität dieses Schnitts folgt aus der Existenz eines Flusses mit Kapazität sieben.

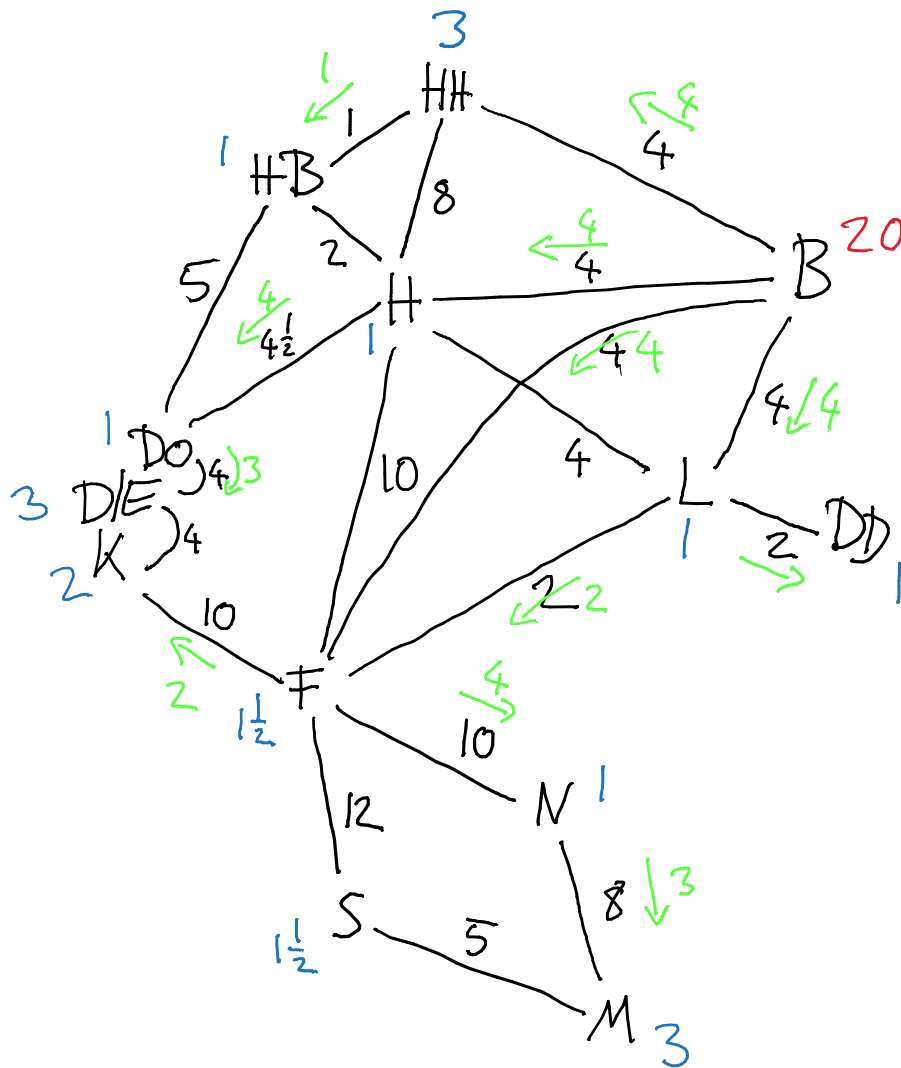
In unserem Beispiel kann man dem Fluss aber auch noch eine ganz konkrete Interpretation geben: man kann daraus sieben mögliche Routen der Mörderin zusammensetzen, so dass keine zwei Routen einen gemeinsamen Grenzübergang benutzen. Zum Beispiel die folgenden (hier nutzen natürlich die Routen, die einen Grenzabschnitt überqueren jeweils unterschiedliche Grenzübergänge; das geht, weil der Fluss die Kapazität nicht übersteigt):



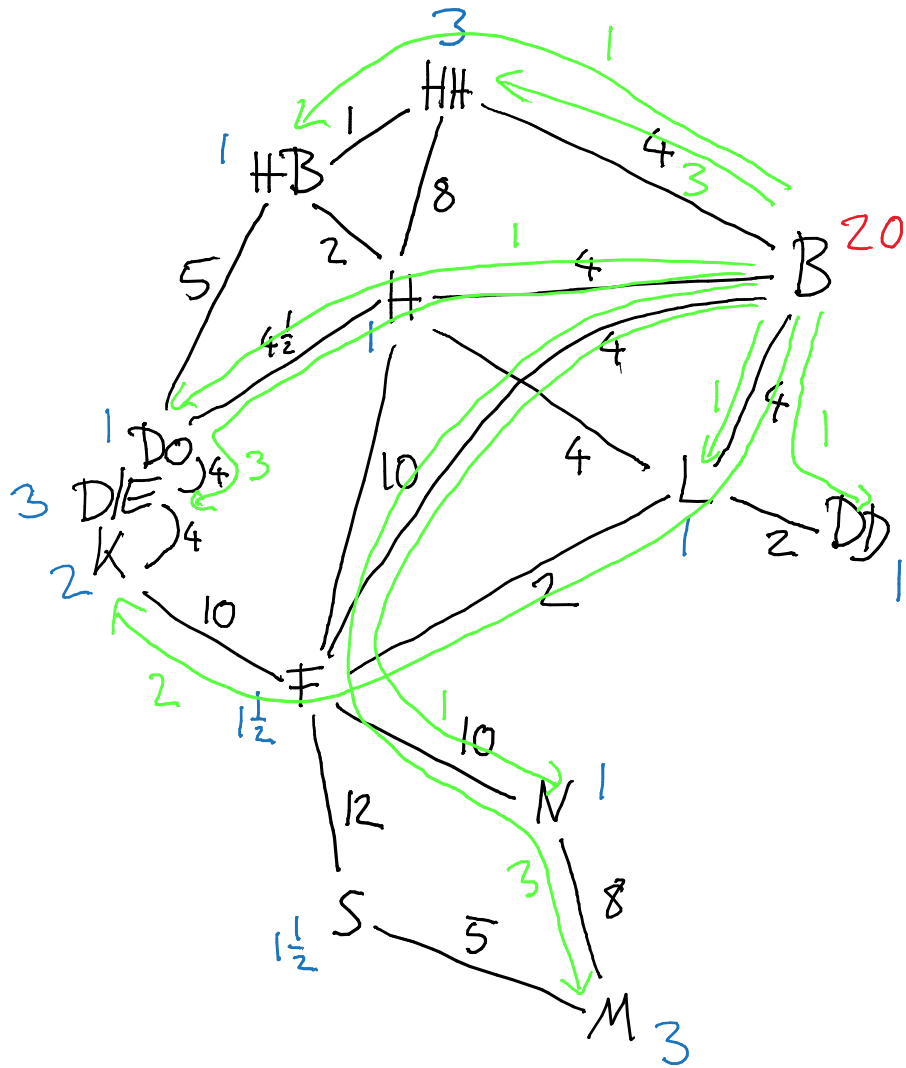
Damit ist direkt klar, dass, falls die Königin nur sechs Grenzübergänge schließen würde (in der irrigen Annahme, unsere Lösung unterbieten zu können), eine der sieben Routen die Mörderin zum Schloss führen würde, ohne dass sie einen der geschlossenen Grenzübergänge passieren müsste.

**Aufgabe P13.2** (Messe in Berlin)

Eine Anwendung des max-flow-min-cut-Algorithmus ergibt zum Beispiel folgenden Fluss:



Dieser realisiert die Abreise von 16 000 Besuchern, die Hannoveraner, Frankfurter und Stuttgarter müssen vorerst noch in Berlin ausharren. Das ist offensichtlich optimal, da die aus Berlin herausführenden Kanten nur diese Kapazität haben. Auch in diesem Fall kann man aus dem Fluss wieder konkrete Reiserouten für Passagiere konstruieren. Z.B. sind die folgenden Routen nicht einmal völlig abwegig (nur die Kölner werden nicht begeistert sein, über Leipzig zu fahren):



Die Tatsache, dass es hier gelungen ist, für jede Stadt eine einzige Route anzugeben, die alle Rückreisenden in diese Stadt gemeinsam benutzen können, ist eine Ausnahme und der Einfachheit des Beispiels geschuldet. Im Allgemeinen würde man erwarten, dass sich die Rückreisenden auf unterschiedliche Routen aufteilen müssen.