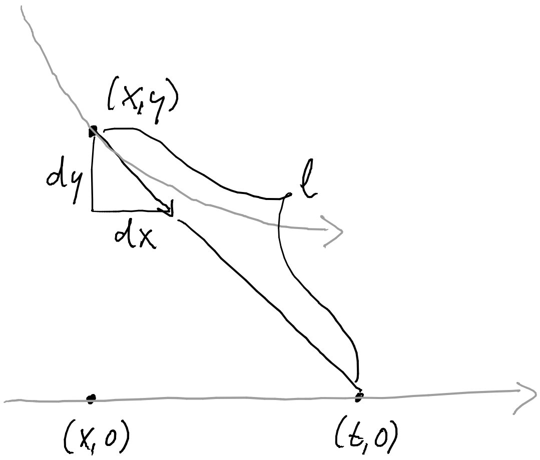
# Riemannsche Geometrie

## 1. Übungsblatt

**Übung 1.1** (Pflug)

Eine Person läuft entlang einer geraden Linie $\alpha(t) = (t, 0)$, $t \geq 0$ und zieht an einem Seil der Länge $\ell$ einen Pflug hinter sich her, der eine Kurve $\beta(t) = (x(t), y(t))$ beschreibt. Der Pflug ist so träge, dass zu jedem Zeitpunkt (i) das Seil gespannt ist und (ii) sich der Pflug auf die Person zu bewegt.




Wir betrachten $t = \bar{t}(y)$ und $x = \bar{x}(y)$ als Funktionen von $y$ und wollen die Kurve $\bar{\beta}(y) = (\bar{x}(y), y)$ bestimmen.

a) Leiten Sie aus der obigen Beschreibung ab:

$$\bar{x}'(y) = -\frac{\bar{t}(y) - \bar{x}(y)}{y} \qquad \left(\text{Physiker-Notation: } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{t-x}{y}\right).$$

b) Leiten Sie außerdem ab:

$$(\bar{t}(y) - \bar{x}(y))^2 + y^2 = \ell^2 \qquad \left((t-x)^2 + y^2 = \ell^2\right).$$

c) Schreiben Sie $\bar{x}(y)$ als Integral.

**Übung 1.2** (Reguläre Flächen)

Welche der folgenden Mengen sind reguläre Flächen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$,
b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 < 1\}$,
c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

**Übung 1.3** (Zylinder)

Zeigen Sie, dass der Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

eine reguläre Fläche ist, indem Sie geeignete Karten angeben.

**Übung 1.4** (Abbildungen und Formen)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$.

a) Geben Sie (ohne Beweis der Wohldefiniertheit) natürliche Bijektionen zwischen den folgenden Mengen von Objekten an

  (i) selbst-adjungierte lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to V$,

  (ii) symmetrische Bilinearformen $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$,

  (iii) quadratische Formen $q\colon V \to \mathbb{R}$.

b) Wie können einem (und damit jedem) dieser Objekte $A$ die folgenden Invarianten zugeordnet werden?

  (i) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$,

  (ii) eine Determinante $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$,

  (iii) eine Spur $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

*Hinweis:* Überlegen Sie, wie in linearer Algebra diese Objekte durch Matrizen beschrieben wurden, wenn eine geeignete Basis für $V$ gewählt wurde. Arbeiten Sie für (a) ohne Basis.

**Abgabe bis 28.4.2017.**