# Riemannsche Geometrie

## 2. Übungsblatt

**Übung 2.1** (Konstruktionen von regulären Flächen)

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}$ glatt ($U$ offen). Zeigen Sie, dass der **Graph**

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

eine reguläre Fläche ist.

b) Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Kurve, die die $x$-Achse nicht trifft ($y(t) \neq 0$). Zeigen Sie, dass der Graph der Abbildung

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{R} \times U &\to \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (x(t), \cos(\theta)y(t), \sin(\theta)y(t)) \end{aligned}$$

eine reguläre Fläche ist. Sie ist die **Rotationsfläche**, die aus $\alpha$ durch Rotation um die $x$-Achse entsteht.

c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \supseteq V \to \mathbb{R}$ glatt ($V$ offen) und $a \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert (d.h. wenn $f(p) = a$, dann $\mathrm{d}f_p \neq 0$). Zeigen Sie, dass die **Niveaumenge**

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = a\}$$

eine reguläre Fläche ist.

*Hinweis:* Verwenden sie für (c) den Satz über die inverse Funktion ähnlich wie in Proposition 2.4.

**Übung 2.2** (Metrik)

Sei $S$ eine reguläre Fläche. Einer stückweise glatten Kurve $\alpha\colon [a, b] \to S$ (von $\alpha(a)$ nach $\alpha(b)$), die nur in den Punkten $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ nicht glatt ist wird die Länge

$$\ell(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{I_\alpha(t)(\alpha'(t))}\mathrm{d}t$$

zugeordnet. Zeigen Sie, dass durch

$$d(p, q) = \inf_{\substack{\gamma \text{ Kurve in } S \\ \text{von } p \text{ nach } q}} \ell(\gamma)$$

eine Metrik auf $S$ definiert wird, d.h. dass gilt:

(M1) (Definitheit) $d(p, q) \geq 0$ und $d(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$,

(M2) (Symmetrie) $d(p, q) = d(q, p)$,

(M3) (Dreiecksungleichung) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

*Hinweis:* (M2) und (M3) sind einfach. Für (M1) wählen Sie $\varepsilon > 0$ so, dass $d_{\mathbb{R}^3}(p, q) \geq \varepsilon$ und folgern Sie, dass $d(p, q) \geq \varepsilon$.

**Übung 2.3** (Extrinsische Krümmung)

Sei $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ die Ebene und $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der Zylinder (vgl. Aufgabe 1.3).

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $E \to Z$, $(x, y, z) \mapsto (\cos x, \sin x, y)$ eine lokale Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie die mittlere Krümmung und die Gauß-Krümmung von $E$ und $Z$ an jedem Punkt.

c) Folgern Sie, dass die mittlere Krümmung keine intrinsische Größe ist.

*Hinweis:* Zu (b): was sind die Hauptkrümmungen?

**Übung 2.4** (Stereographische Projektion)

Wir betrachten die Sphäre $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit Nordpol $n = (0, 0, 1)$ und Südpol $s = (0, 0, -1)$ sowie die Ebene $H = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$. Die stereographische Projektion $\pi_n \colon S \setminus \{n\} \to H$ bildet einen Punkt $p$ auf den eindeutigen Schnittpunkt der Geraden durch $p$ und $n$ mit $H$ ab. Die Projektion $\pi_s \colon S \setminus \{s\} \to H$ ist analog definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\pi_n$ und $\pi_s$ Homöomorphismen sind und verwenden Sie sie, um Karten für $S$ zu definieren.

b) Zeigen Sie, dass $\pi_n$ keine Isometrie ist.

c) Eine Abbildung $\varphi \colon S_1 \to S_2$ heißt *konform* oder *winkelerhaltend* wenn es eine glatte Abbildung $\lambda \colon S_1 \to \mathbb{R}^*$ gibt, so dass

$$I_p(v) = \lambda^2(p) I_{\varphi(p)}(\mathrm{d}\varphi(v))$$

für alle $p \in S_1$ und alle $v \in T_p(S_1)$. Zeigen Sie, dass $\pi_n$ konform ist.