Riemannsche Geometrie

3. Übungsblatt

Übung 3.1 (Volumen eines Parallelepipeds)

Wir betrachten Vektoren $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Volumen des Parallelepipeds

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid 0 \le \alpha \le 1 \right\}$$

gegeben ist durch $|\det(v_1, \dots, v_n)|$. Die Determinante ist zu verstehen als die Determinante der Matrix, deren Spalten die Vektoren v_i sind.

Übung 3.2 (Hauptkrümmung)

Sei S eine reguläre Fläche mit Normalenvektorfeld N. Eine Kurve $\alpha\colon I \to S$ heißt *Krümmungskurve*, wenn für jedes $t \in I$ die Richtung $\alpha'(t)$ eine Hauptrichtung von S (an $\alpha(t)$) ist.

Zeigen Sie: α ist genau dann eine Krümmungskurve, wenn es eine Funkion $\lambda\colon I \to \mathbb{R}$ gibt so dass

$$N'(\alpha(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

In diesem Fall ist $-\lambda(t)$ die Hauptkrümmung von S in Richtung von $\alpha'(t)$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Basis von $T_{\alpha(t)}S$ die aus Eigenvektoren von $\mathrm{d}N_{\alpha(t)}$ besteht.

Übung 3.3 (Krümmung des Hyperboloids)

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung des einschaligen Hyperboloids

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Hinweis: Beobachten Sie, dass Y eine Rotationsfläche ist.

Übung 3.4 (Hyperbolische Ebene)

Wir betrachten die Halbebene

$$H := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \quad \text{mit Metrik} \quad g = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

und die Poincaré-Scheibe

$$P := \{u + iv \in \mathbb{C} \mid u^2 + v^2 < 1\} \quad \text{mit Metrik} \quad h = \operatorname{diag}\left(\frac{2\sqrt{u^2 + v^2}}{1 - u^2 - v^2}\right)$$

wobei $\operatorname{diag}(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ ist.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon H &\to P \\ x + iy &\mapsto \frac{x + i(y-1)}{y + 1 - ix} \end{aligned}$$

eine Isometrie ist.

Zwischenergebnisse mit $d := x^2 + (y+1)^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}\varphi(x, y) &= \frac{2}{d^2} \begin{pmatrix} (y+1)^2 - x^2 & -2x(y+1) \\ 2x(y+1) & (y+1)^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ h(\varphi(x, y)) &= \operatorname{diag}\left(\frac{d^2}{4y^2}\right) \\ (\mathrm{d}\varphi)^T(\mathrm{d}\varphi) &= \operatorname{diag}\left(\frac{4}{d^2}\right) \end{aligned}$$