Riemannsche Geometrie

4. Übungsblatt

Übung 4.1 (Ableiten von Vektorfeldern)

Sei S eine reguläre Fläche und seien $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ und $Y\colon S \to \mathbb{R}^3$ glatte Vektorfelder entlang S, d.h. $X(p) \in T_p(S)$ und $Y(p) \in T_p(S)$ für alle $p \in S$. Wie nehmen außerdem an, dass $X(p) \neq 0 \neq Y(p)$ für alle $p \in S$.

a) Geben Sie ein Beispiel, dass $\frac{\partial Y}{\partial X(p)}$ im Allgemeinen nicht in $T_p(S)$ liegt, also $p \mapsto \frac{\partial Y}{\partial X(p)}$ kein Vektorfeld ist.

b) Zeigen Sie, dass $p \mapsto \frac{\partial Y}{\partial X(p)} - \frac{\partial X}{\partial Y(p)}$ ein Vektorfeld ist.

Übung 4.2 (Isometrien der Sphäre)

Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O_{n+1}(\mathbb{R})$ durch Isometrien auf der n-Sphäre wirkt.

Übung 4.3 (Volumen der Sphäre)

Berechnen Sie das Volumen der 2-Sphäre.

Hinweis: Verwenden Sie entweder die Karte aus Übung 2.4 um $\mathrm{vol}(S^2) = \mathrm{vol}(S^2 \setminus \{n\})$ zu berechnen oder berechnen Sie das Volumen eines Rechtwinkligen Dreiecks T in S^2 und schließen sie, dass $\mathrm{vol}(S^2) = 8\,\mathrm{vol}(T)$.

Übung 4.4 (Hyperbolischer Raum und Pseudosphäre)

Eine weitere Parametrisierung der Tractrix (vgl. Übung 1.1 und Vorlesungs-Beispiel Pseudosphäre) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \operatorname{sech} t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh t} \begin{pmatrix} t\cosh t - \sinh t \\ 1 \end{pmatrix}, t \geq 0$$

Wir betrachten die Parametrisierung der Pseudosphäre P (Rotationsfläche der Tractrix) durch

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (r(t), s(t)\cos(\theta), s(t)\sin(\theta)).$$

Sei H die hyperbolische Ebene (Übung 3.4). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{(x, y) \in H \mid y \geq 1\} &\to P \\ (x, y) &\mapsto (r(\operatorname{arcosh} y), s(\operatorname{arcosh}(y))\cos x, s(\operatorname{arcosh}(y))\sin x) \end{aligned}$$

eine lokale Isometrie ist.

Hinweis: $\sinh \operatorname{arcosh}(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ für $t \geq 0$.