Riemannsche Geometrie

5. Übungsblatt

Übung 5.1 (Paralleltransport in regulären Flächen)

Sei S eine reguläre Fläche, $c\colon I \to S$ eine Kurve und $V : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld entlang c (d.h. $V(t) \in T_{c(t)}S$).

a) Verifizieren Sie, dass $\frac{DV}{\mathrm{d}t} := \mathrm{pr}_{T_{c(t)}} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ eine kovariante Ableitung definiert (hier ist pr_A die orthogonale Projektion auf den Unterraum A).

b) Zeigen Sie, dass V parallel ist genau dann, wenn $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ senkrecht auf $T_{c(t)}S$ steht.

Übung 5.2 (Abhängigkeit des Paralleltransport von der Kurve)

Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $c_1, c_2\colon [a, b] \to M$ zwei Segmente von p nach q (d.h. $c_1(a) = c_2(a) = p$, $c_1(b) = c_2(b) = q$). Sei $v_0 \in T_p(M)$ ein Tangentialvektor und $v_i \in T_q(M)$ der Vektor der durch Paralleltransport von v_0 entlang c_i entsteht, $i = 1, 2$.

a) Zeigen Sie, dass $v_1 = v_2$ ist wenn $M = \mathbb{R}^n$ ein euklidischer Raum ist.

b) Geben Sie ein Beispiel das zeigt, dass im Allgemeinen $v_1 \neq v_2$ sein kann.

Übung 5.3 (Isometrien der hyperbolischen Ebene)

Sei $H = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die hyperbolische Ebene (Übung 3.4).

a) Verifizieren Sie, dass die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .z = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine Gruppenwirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf H definiert.

b) Verifizieren Sie, dass es eine Wirkung durch Isometrien ist, d.h. dass die Abbildung $z \mapsto g.z$ für jedes $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine Isometrie ist.

Übung 5.4 (Volumen der Pseudosphäre)

Berechnen Sie die Fläche der Pseudosphäre. Vergleichen Sie mit der Fläche der Sphäre und reflektieren Sie die Bedeutung des Begriffs “Pseudosphäre”.

Hinweis: Verwenden Sie Übung 4.4 und berechnen Sie die Fläche der Teilmenge $\{(x, y) \in H \mid 0 \leq x \leq 2\pi, 1 \leq y\}$ der hyperbolischen Ebene. Beachten Sie für den Vergleich, dass “Pseudosphäre” die Vereinigung der beiden regulären Flächen mit $x \geq 0$ und $x \leq 0$ meint.