Riemannsche Geometrie

6. Übungsblatt

Übung 6.1 (Paralleltransport in der hyperbolischen Ebene)

Wir betrachten wieder einmal die hyperbolische Ebene $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $g_{i,j} = \delta_{i,j} \frac{1}{y^2}$.

a) Zeigen Sie, dass die Christoffel-Symbole des riemannschen Zusammhangs die folgenden sind:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0$$
$$-\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

b) Wir betrachten die Kurve $c\colon [0,\infty) \to H$ mit Koordinaten $(x(t), y(t)) = (t, 1)$ und den Tangentialvektor $v_0 = (0,1) = \frac{\partial}{\partial y}$ an $c(0)$. Sei V das Vektorfeld, das durch Paralleltransport von v_0 entlang c entsteht. Verifizieren Sie, dass $V(t)$ einen Winkel von t mit dem Vektor $(0,1)$ einschließt.

Hinweis: Definieren Sie für (b) ein Vektorfeld $W(t)$, das einen Winkel von t einschließt. Überprüfen Sie mithilfe von (a), dass es parallel ist und schließen Sie mit Eindeutigkeit dass $V = W$.

Übung 6.2 (Geodäten in der hyperbolischen Ebene)

Sei wieder H die hyperbolische Ebene. Verifizieren Sie, dass die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to H$$
$$t \mapsto (0, \frac{1}{t})$$

eine Geodäte ist.

Verwenden Sie die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ um zu zeigen: für $x, y \in \mathbb{R}$ gibt es eine Geodäte $\gamma_{x,y}$ in H mit $\lim_{t\to 0} \gamma_{x,y}(t) = (x,0)$ und $\lim_{t\to\infty} \gamma_{x,y}(t) = (y,0)$ (die Punkte $(x,0)$ und $(y,0)$ liegen natürlich nicht in H). Beschreiben Sie diese.

Hinweis: Fassen Sie γ als $\gamma_{0,\infty}$ auf und rechnen Sie naiv mit ∞.

Übung 6.3 (Geodäten minimieren nicht global)

Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass für eine Geodäte γ von p nach q im Allgemeinen nicht gilt $d(p,q) = \ell(\gamma)$.

Übung 6.4 (Fortsetzbarkeit von Geodäten)

Betrachten Sie die offene Kreisscheibe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (mit der euklidischen Metrik, *nicht* der hyperbolischen). Geben Sie V, δ, ε wie in Proposition 5.3 an, die optimal sind.