Riemannsche Geometrie

7. Übungsblatt

Übung 7.1 (Sphärische Scheiben)

Zeigen Sie, dass die Fläche von Scheiben

$$S^2_{a,b} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, a \le z \le b\}$$

für $-1 \le a, b \le 1$ nur von der Dicke $|b - a|$ abhängt.

Nutzen Sie diese Rechnung um folgendes Rätsel zu lösen: In einem flachen, kreisrunden Kuchen vom Radius 1 ist eine Münze vom Radius 1/100 horizontal versteckt. Wieviele gerade Schnitte braucht man, um die Münze zu finden und wie sind die Schnitte anzubringen?

Hinweis: Für diesen Zweck ist die Karte $\mathbf{x}(z, \varphi) = (\sqrt{1 - z^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - z^2} \sin \varphi, z)$ geeignet.

Übung 7.2 (Geodäten auf Rotationsflächen)

Sei $\alpha \colon \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Kurve, die die x-Achse nicht trifft ($y(t) \neq 0$). Wir betrachten die Rotationsfläche R mit den Karten

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (x(r), y(r) \cos(\theta), y(r) \sin(\theta)).$$

In der Vorlesung haben wir ausgerechnet, dass die Metrik in diesen Karten gegeben ist durch $g_{11} = (x')^2 + (y')^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = y^2$.

a) Zeigen Sie, dass die lokalen Gleichungen für eine Geodäte $\gamma(t) = \mathbf{x}(r(t), \theta(t))$ gegeben sind durch

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2yy'}{y^2}\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{yy'}{(x')^2 + (y')^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{y'y'' + x'x''}{(x')^2 + (y')^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 0$$

b) Rechnen Sie nach, dass diese Gleichungen (für Geodäten mit $\theta', r' \neq 0$) äquivalent sind zu den folgenden Bedingungen:

(i) die kinetische Energie $|\gamma'|^2$ ist konstant

(ii) wenn β der Winkel ist, den γ' mit dem Kreis $x = \text{const}$ einschließt (und dessen Radius y ist), dann ist $y \cos \beta$ konstant.

c) Folgern Sie aus (bii), dass eine Geodäte auf der Rotationsfläche von

$$\alpha \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (t^2, t)$$

(Paraboloid) sich selbst unendlich oft schneidet.

(Bitte wenden)

Übung 7.3 (Exponentialabbildung)

Wir betrachten die Menge $G = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Sie ist gleichzeitig eine Gruppe unter Multiplikation und eine glatte Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum T_pG jedes Punktes p kann kanonisch mit $\mathbb{R}$ identifiziert werden (wobei 1 mit $c'(0)$ identifiziert wird für die Kurve $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G, t \mapsto p + t$).

a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige riemannsche Metrik auf G gibt für die gilt:
   (i) $\langle v \mid w \rangle_1 = vw$ und
   (ii) für jedes $g \in G$ is $p \mapsto gp$ eine Isometrie.
b) Bestimmen Sie für $v \in T_1(G) \cong \mathbb{R}$ eine Geodäte $\gamma\colon R \to G$ mit $\gamma(0) = 1$ und $\|\gamma'(t)\| = v$.
c) Verifizieren Sie, dass die Exponentialabbildung $\exp_1\colon R \cong T_1G \to G$ die gewöhnliche Exponentialfunktion ist.

Übung 7.4 (Metrik und Geodäten)

Zeigen Sie, dass zwei Punkte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit im Allgemeinen nicht durch eine Geodäte verbunden sind. Betrachten Sie dazu zum Beispiel

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \leq 0\}.$$