Riemannsche Geometrie

8. Übungsblatt

Übung 8.1 (Linearitätseigenschaften der Krümmung)

Beweisen Sie Proposition 6.3.

Übung 8.2 (Kovariantes Differential der Metrik)

Zeigen Sie, dass das kovariante Differential ∇G des metrischen Tensors G verschwindet.

Übung 8.3 (Lineare Algebra)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle - \mid - \rangle$. Sei V^* der Dualraum, d.h. die Elemente sind lineare Abbildungen $V \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\dim V^* = \dim V$.

b) Geben Sie einen natürlichen injektiven Homomorphismus $V \to V^{**}$ an und folgern Sie, dass es ein Isomorphismus ist. (Hierzu brauchen Sie das Skalarprodukt nicht!)

c) Geben Sie einen injektiven Homomorphismus $V \to V^*$ an und folgern Sie, dass es ein Isomorphismus ist. (Hierzu brauchen Sie das Skalarprodukt!)

Übung 8.4 (Multilineare Algebra)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und V^* der Dualraum.

a) Zeigen Sie, dass der Vektorraum der bilinearen Abbildungen $V^* \times V \to \mathbb{R}$ natürlich isomorph ist zum Vektorraum $\operatorname{End}(V)$ der Endomorphismen von V.

b) Definieren Sie damit die Spur $\operatorname{tr}(\varphi) \in \mathbb{R}$ einer bilinearen Abbildung $\varphi\colon V^* \times V \to \mathbb{R}$.

c) Erklären Sie, wie man allgemeiner eine Spurabbildung $\operatorname{tr}_{k,\ell}$ erhält mit folgender Eigenschaft: gegeben eine multilineare Abbildung

$$\varphi\colon \prod_{i=1}^{m} V^* \times \prod_{j=1}^{n} V \to \mathbb{R}$$

und Indizes $k \in \{1, \dots, m\}, \ell \in \{1, \dots, n\}$ ist $\operatorname{tr}_{k,\ell}(\varphi)$ eine multilineare Abbildung

$$\operatorname{tr}_{k,\ell}(\varphi)\colon \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} V^* \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq \ell}}^{n} V \to \mathbb{R}.$$